

Aufgabenserie 2 zur Vorlesung "Mathematik für Kompass"

**1.** Wir führen die Relation  $R$  in  $\mathbb{Z}$  ein, bei der für zwei Zahlen  $a, b$  die Relation  $a \sim b$  gilt, wenn  $(a - b)$  durch 3 teilbar ist. Zeigen Sie, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt. Wie sehen die Äquivalenzklassen aus?

**2.** Veranschaulichen Sie sich die folgenden Funktionen

$$\begin{array}{lll} \text{a)} f(x) = \sqrt{x}, & \text{b)} f(x) = \frac{1}{x}, & \text{c)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \\ \text{d)} f(x) = x^4, & \text{e)} f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}. & \end{array}$$

Klären Sie Definitionsbereich und Wertebereich. Geben Sie die Nullstellen an. Hat die Funktion Polstellen und wenn ja welche? Sind die Funktionen monoton wachsend oder fallend?

**3.** Veranschaulichen Sie sich die folgenden Funktionen

$$\text{a)} f(x) = \sin(6x), \quad \text{b)} f(x) = 2 \cos(x/2), \quad \text{c)} f(x) = \tan(2x).$$

Klären Sie Definitionsbereich, Wertebereich, ob die Funktion periodisch ist und wenn ja Periode angeben, Polstellen.

**4.** Bestimmen Sie von folgenden Funktionen Definitionsbereich und Wertebereich:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, & \text{b)} f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \\ \text{c)} f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right). & \end{array}$$

Welche der Funktionen sind eineindeutig? Ermitteln Sie ggf. die Umkehrfunktion.

**5.** Lösen Sie die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sin(x) = 0.7 \text{ für } x \in [0, \frac{\pi}{2}], & \text{b)} e^{2x} = 17, \\ \text{c)} 3^x = 22, & \text{d)} x^{6.3} = 111. \end{array}$$

**6.** Betrachten Sie die Wachstumsfunktion

$$f(x) = a e^{bx} \quad \text{für } x \geq 0,$$

die die zeitliche Entwicklung des Produktionsvolumens eines Wirtschaftssektors in Geldeinheiten (GE) in einer Region beschreibt. Die Variable  $x$  stellt die Zeit dar. Die Parameter  $a, b$  sind zunächst unbekannt. Man weiß, dass zur Zeit 0 ein Volumen von 10GE und zur Zeit 10 ein Volumen von 20GE vorliegt. Bestimmen Sie die Parameter  $a, b$ . Zu welchem Zeitpunkt wird ein Volumen von 35 erreicht?

**7.** Ermitteln Sie die Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15.$$

Geben Sie auch die Faktorisierung des Polynoms an.

Hinweis: Überlegen Sie, ob  $\pm 1$  oder  $\pm 2$  Nullstellen sind.

**8.** Bestimmen Sie Nullstellen, Lücken und Polstellen der Funktion

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 10x}{x^2 - 6x + 8}, \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + 3x - 10}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Polynomdivision die Asymptote der Funktion.