Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Sommersemester 2021

Aufgabenserie 6 zur Vorlesung "Mathematik für Kompass"

1. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 6 & -7 & -1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 77 & 50 \\ 1 & 66 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme, falls möglich, $A+B$, A^T+C, $A+D$ und $2C^T+A$.

2. Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $\vec{x}A$ und $A\vec{x}$.

3. Für einen zweistufigen Produktionsprozess sind die jeweiligen Bedarfsgrößen an Roh- und Zwischenprodukten in den folgenden beiden Tabellen zusammengefasst:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	3	4	1	2
R_2	1	2	2	0
R_3	2	1	3	5

	E_1	E_2
Z_1	3	3
Z_2	1	2
Z_3	4	5
Z_4	2	1

.

R_1, R_2, R_3 bezeichnen die Rohstoffe, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 die Zwischenprodukte, E_1, E_2 die Endprodukte.

a) Zeichnen Sie den Verflechtungsgraphen. Bestimmen Sie die Gesamtverflechtungsmatrix von Rohstoffen und Endprodukten.

b) Berechnen den Bedarf an Rohstoffen zur Produktion von 150 Einheiten E_1 und 100 Einheiten E_2.

c) Berechnen Sie die Rohstoffkosten zur Produktion des unter b) genannten Sortiments.

Dabei sind Kosten für eine Einheit R_1 von 3 Euro, für eine Einheit R_2 von 5 Euro und für eine Einheit R_3 von 2 Euro zu berücksichtigen.

4. Berechnen Sie die Ränge der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist B^{-1}?

Hinweis: Bilden Sie das Spatprodukt der Spalten von C. Schließen Sie daraus, ob die Vektoren in einer Ebene liegen (linear abhängig sind) oder nicht.

5. Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, für die die Gleichung

$$XA^T = B$$

erfüllt ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie dabei zunächst die Gleichung allgemein und setzen Sie dann die speziellen Matrizen A, B ein.

6. Berechnen Sie die folgenden Determinanten

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Geben Sie die Matrix an, die die Drehung eines Vektors um 300° beschreibt. Führen Sie die Drehung für den Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ aus.}$$

8. Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, für die die Gleichung

$$B + XA^T = 2X$$

erfüllt ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie dabei zunächst die Gleichung allgemein und setzen Sie dann die speziellen Matrizen A, B ein.