1. Einführung

Logik

DEFINITION: Unter einer Aussage versteht man die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhaltes der objektiven Realität, bei dem eindeutig entschieden werden kann, ob er wahr oder falsch ist.

▷ Operationen mit Aussagen (Verknüpfung von Aussagen):

NEGATION nicht p, Symbol $\bar{p}$, Wahrheitswert wird verändert: falsch in wahr bzw. umgekehrt

KONJUNKTION $p \wedge q$, p und q, Wahrheitswert ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen zugleich wahr sind, sonst Ergebnis falsch

DISJUNKTION (ALTERNATIVE) $p \vee q$, p oder q, Wahrheitswert ist nur dann wahr, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen wahr ist, sonst Ergebnis falsch.

Besonderheit: $p \vee q$ auch wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind (teilweise anders als üblichen Sprachgebrauch)

IMPLIKATION $p \rightarrow q$, p impliziert q, Wahrheitswert ist nur dann falsch, wenn p wahr, aber q falsch ist, sonst Ergebnis wahr.

Aus der Aussage p folgt die Aussage q ($p \Longrightarrow q$). p heißt auch hinreichende Bedingung für q, q heißt notwendige Bedingung für p.

ÄQUIVALENZ $p \leftrightarrow q$, p und q sind äquivalent, Wahrheitswert ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen denselben Wahrheitswert besitzen, sonst Ergebnis falsch.

p gilt genau dann wenn q gilt (hier auch: $p \Longleftrightarrow q$)

- *Allquantor*: $\forall x$ "Für alle x gilt:..."

  Beispiel: $\forall x : x^2 \geq 0$ entspricht "Für alle reellen x gilt: x^2 ist größer oder gleich 0".
- *Existenzquantor*: $\exists x$ "Es existiert ein x, so dass..."

  Beispiel: $\exists x : x^2 = 1$ entspricht "Es existiert ein reelles x mit x^2 gleich 1".

- Wahrheitstafeln - für verschiedene Belegungen der logischen Variable wird der Wahrheitswert logischer Ausdrücke angegeben

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$	$p \leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

- logische Ausdrücke: Verknüpfung von logischen Variablen mit Hilfe der obigen Operationen und Klammern, die die Reihenfolge der Abarbeitung der Operationen regeln. Klammern setzen, da hier *keine Prioritätenregeln* üblich sind.

Mengenlehre

DEFINITION: Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung von einzelnen wohlunterschiedenen Objekten zu einer Einheit. Die einzelnen Objekte, aus denen sich die Menge zusammensetzt, werden *Elemente* der Menge genannt.

Angabe von Mengen:

a) Angabe der Elemente: $M = \{1, 3, 5, 7\}$, b) Angabe einer Eigenschaft, die in eindeutiger Weise die Zugehörigkeit klärt

- Zahlensysteme
  $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
  $\mathbb{N}_0$ Menge der natürlichen Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  $\mathbb{Z}$ Menge aller ganzen Zahlen $\{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}$
  $\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen $\{\frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
  $\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
  $\mathbb{R}^+$ Menge der reellen Zahlen ≥ 0.
- Elementbeziehung $\in$, $\notin$ Negation dazu
  $x \in A$ bedeutet, dass x ein Element der Menge A ist.
  $x \notin A$ bedeutet, dass x kein Element der Menge A ist.
  $\emptyset$ leere Menge, enthält keine Elemente
  Zwei Mengen sind gleich, wenn beide Mengen genau die gleichen Elemente besitzen.

- *Mengeninklussion*
  $A \subset B$ bedeutet, dass jedes Element aus A auch Element von B ist, A ist eine *Teilmenge* von B; es ist möglich, dass die beiden Mengen gleich sind

$$A \subset B \underbrace{\text{ genau dann, wenn }}_{\Longleftrightarrow} \forall x : x \in A \Longrightarrow x \in B$$

z.B. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Es gilt: $A \subset A$, $\emptyset \subset A$ und

$$A \subset B \text{ und } B \subset C \Longrightarrow \ A \subset C$$

- *Mengenoperationen*:
  VEREINIGUNG: $A \cup B$, es entsteht eine Menge, die sowohl die Elemente von A als auch

die Elemente von B enthält. als logische Aussage

$$x \in A \cup B \underset{\Longleftrightarrow}{\text{genau dann, wenn}} (x \in A) \vee (x \in B)$$

Durchschnitt: $A \cap B$, es entsteht eine Menge, genau die Elemente enthält, die sowohl in A als auch gleichzeitig in B enthalten sind. als logische Aussage

$$x \in A \cap B \underset{\Longleftrightarrow}{\text{genau dann, wenn}} (x \in A) \wedge (x \in B)$$

Differenz: $A \backslash B$, es entsteht eine Menge, bei der aus der Menge A die Elemente von B entfernt wurden, d.h. diese Menge enthält die Elemente, die zu A aber nicht zu B gehören. als logische Aussage

$$x \in A \backslash B \underset{\Longleftrightarrow}{\text{genau dann, wenn}} (x \in A) \wedge (x \notin B)$$

Zwei Mengen A, B sind *disjunkt (elementefremd)*, wenn es kein Element gibt, das sowohl in A als auch in B enthalten ist, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

Gleichungen und Ungleichungen

- äquivalente Umformungen bei Gleichungen:

  Eine Zahl auf beiden Seiten addieren, subtrahieren, multiplizieren (dabei Zahl $\neq 0$) bzw. dividieren (dabei Zahl $\neq 0$)

- äquivalente Umformungen bei Ungleichungen:

  Eine Zahl auf beiden Seiten addieren, subtrahieren, multiplizieren (dabei Zahl $\neq 0$) bzw. dividieren (dabei Zahl $\neq 0$). Bei Multiplikation bzw. Division mit einer negativen Zahl ändert sich das Relationszeichen.

Summen und Produkte

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ \sum_{i=n}^{m} a_i &= a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m \end{aligned}$$

reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$,
analog bei Produkten

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

- einige Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{m} a_i + \sum_{i=n}^{m} b_i &= \sum_{i=n}^{m}(a_i + b_i)\\ \sum_{i=n}^{m}(ca_i) &= c \cdot \sum_{i=n}^{m} a_i\\ \sum_{i=l}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i &= \sum_{i=l}^{m} a_i \qquad (l \leq n < m)\end{aligned}$$

- einige Summen/Produkte:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c &= nc, \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ \prod_{i=1}^{n} c &= c^n, \quad \prod_{i=1}^{n} i = n!\end{aligned}$$

- Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \text{für } n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\\ \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n\\ \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n\end{aligned}$$

$\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus n Elementen k auszuwählen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Pascalsches Dreieck

$n = 0:$ 1

$n = 1:$ 1 1

$n = 2:$ 1 2 1

$n = 3:$ 1 3 3 1

$n = 4:$ 1 4 6 4 1

$n = 5:$ 1 5 10 10 5 1

für jedes n : $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$

- Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

2. Funktionen I

Äquivalenzrelationen

DEFINITION: Eine beliebige Teilmenge R von $M \times N$ definiert eine Relation R zwischen Elementen von M und N. Ist $M = N$, so spricht man von einer Relation in M.

Ist $(a, b) \in M \times N$, dann sagt man, dass a in Relation zu b steht, $a \sim b$.

DEFINITION: Eine Relation R in M heißt *reflexiv*, falls $x \sim x$,
sie heißt *symmetrisch*, wenn $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$,
die Relation heißt *transitiv*, wenn $x \sim y \wedge y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.
Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation*.

SATZ: Eine Äquivalenzrelation zerlegt die Grundmenge M in Teilmengen, deren Elemente untereinander in der Relation R stehen.

Funktionen

DEFINITIONEN: Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : A \to B$ (A und B sind zwei Mengen) ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet. Die Menge $A = D_f$ heißt *Definitionsbereich* der Funktion. Ist $y = f(x)$, dann heißt y das *Bild* zu x und x ist ein *Urbild* zu y. Die Menge $W_f = \{f(x) : x \in A\}$ aller Bilder heißt *Wertebereich* der Funktion.

DEFINITION: Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *eineindeutig*, wenn für jedes Bild $y \in B$ genau ein Urbild x mit $y = f(x)$ existiert. Ist $f : A \to B$ eineindeutig, dann heißt $f^{-1} : B \to A$ *Umkehrfunktion* von f, falls

$$\forall x \in A \; \forall y \in B : \; x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x)$$

DEFINITION: Eine Funktion $f : D \longrightarrow W$ ist eine *gerade bzw. ungerade Funktion*, falls

$$f(-x) = f(x) \; \forall x \in D \text{ bzw. } f(-x) = -f(x) \; \forall x \in D.$$

DEFINITION: Eine Funktion f heißt *periodisch* mit der Periode $p > 0$, falls

$$f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in D$$

und p ist der kleinste derartige Wert.

Potenzfunktion

$$f(x) = x^m$$

$m \in \mathbb{N}, m$ ungerade: $D = \mathbb{R}$, monoton wachsend, keine Polstelle,
$m \in \mathbb{N}, m$ gerade: $D = \mathbb{R}$, monoton wachsend für $x > 0$, monoton fallend für $x < 0$, keine Polstelle
$m \notin \mathbb{N}, m < 0$: $D = (0, \infty)$, monoton fallend, Polstelle 0
$m \notin \mathbb{N}, m > 0$: $D = (0, \infty)$, monoton wachsend, keine Polstelle

Exponentialfunktionen

$$f(x) = a^x$$

andere Form der Definition

$$f(x) = e^{bx}$$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, Wertebereich $W = (0, \infty)$,
monoton wachsend falls $a > 1$ bzw. $b > 0$
monoton fallend falls $a < 1$ bzw. $b < 0$

Logarithmen

$\log_a b = c \Longleftrightarrow \ b = a^c$
$\ln b = c \Longleftrightarrow \ b = e^c$

$$\begin{aligned} \log_a a &= 1, \qquad \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) &= \log_a b - \log_a c, \qquad \log_a b^c = c \log_a b \ \text{ für } a, b, c > 0 \end{aligned}$$

natürlicher Logarithmus ln

$$\begin{aligned} \ln e &= 1, \qquad \ln (b \cdot c) = \ln b + \ln c, \\ \ln \left(\frac{b}{c}\right) &= \ln b - \ln c, \qquad \ln (b^c) = c \ln b \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

a) Sinusfunktion: $f(x) = \sin x,\ f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
Funktion mit Periode 2π: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x\ \forall x, k \in \mathbb{Z}$
ungerade Fkt.: $\sin(-x) = -\sin(x)$
Nullstellen: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ Vielfache von π
b) Cosinusfunktion: $f(x) = \cos x,\ f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$
Funktion mit Periode 2π: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x\ \forall x, k \in \mathbb{Z}$
gerade Funktion: $\cos(-x) = \cos x$
Nullstellen: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$ Vielfache von π plus $\frac{\pi}{2}$
c) Tangensfunktion: $f(x) = \tan x = \sin(x)/\cos(x),\ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
Funktion mit Periode π: $\tan(x + k\pi) = \tan x\ \forall x, k \in \mathbb{Z}$, Polstellen $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\ (k \in \mathbb{Z})$
ungerade Funktion: $\tan(-x) = -\tan x$
Nullstellen wie bei Sinusfkt.
d) Cotangensfunktion: $f(x) = \cot x = \cos(x)/\sin(x),\ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
Funktion mit Periode π: $\cot(x + k\pi) = \cot x\ \forall x, k \in \mathbb{Z}$
ungerade Funktion: $\cot(-x) = -\cot x$
Nullstellen wie bei Kosinusfkt.
e) allgemeine Sinusfunktion: $f(x) = a \cdot \sin bx$
allgemeine Cosinusfunktion: $f(x) = a \cdot \cos bx$
haben Periode $p = \frac{2\pi}{b}$, Wertebereich $[-a, a]$
allgemeine Tangensfunktion: $f(x) = a \cdot \tan bx$
hat Periode $p = \frac{\pi}{b}$, Wertebereich $\mathbb{R}$

- Grundeigenschaften

$$
\begin{aligned}
(\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= 1 \\
\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos x \qquad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \\
\sin(x + \pi) &= -\sin x \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x \\
\cot x &= \frac{1}{\tan x} \\
\sin x &= \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}, \qquad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}
\end{aligned}
$$

$\pm$ besagt, dass das Vorzeichen entsprechend dem Quadranten zu wählen ist.

- Additionstheoreme

$$
\begin{aligned}
\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{aligned}
$$

- Aus den Additionstheoremen lassen sich weitere Formeln ableiten:

$$
\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x, \qquad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1\\
\tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\\
\sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x, \qquad \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x\\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\\
\sin^3 x &= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x), \qquad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)
\end{aligned}
$$

- Wertetabelle

Funktion $\because x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$

- Hyperbolische Funktionen

a) Hyperbelsinus

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

b) Hyperbelkosinus

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$$

c) Hyperbeltangens

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Polynome

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Nullstellen. Seien $x_1, \ldots, x_m$ $(m \leq n)$ die verschiedenen reellen Nullstellen von $p(x)$. Dann gilt

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_m)^{k_m} q(x)$$

wobei $k_i \in \mathbb{N}, k_1 + \ldots + k_m \leq n$ und $q(x)$ ist ein Polynom, welches keine reellen Nullstellen (aber komplexe) besitzt. $k_1, \ldots, k_m$ heißen *Vielfachheiten* der Nullstellen $x_1, \ldots, x_m$.

gebrochenrationale Funktionen

$p(x)$ Polynom mit reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_m$, $q(x)$ Polynom mit reellen Nullstellen $y_1, \ldots, y_n$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

z Nullstelle von $p(x)$, $p(z) = 0, q(z) \neq 0 \Longrightarrow z$ Nullstelle von $f(x)$
z Nullstelle von $q(x)$, $p(z) \neq 0, q(z) = 0 \Longrightarrow z$ Polstelle von $f(x)$
z Nullstelle von $p(x)$ und $q(x)$, $p(z) = 0, q(z) = 0 \Longrightarrow z$ Lücke von $f(x)$

3. Vektoren

$$\text{Vektor: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Nullvektor: } \vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *Betrag* (*Länge*) eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

- *Addition und Subtraktion* zweier Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

- *Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl* $t \in \mathbb{R}$

$$t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ \vdots \\ t \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Rechengesetze für einfache Operationen mit Vektoren

Addition:

a) Kommutativgesetz $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

b) Assoziativgesetz

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

c) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ Nullvektoreigenschaft $(\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^n)$

Multiplikation mit einer Zahl:

d) Assoziativgesetz

$$s\cdot(t\cdot\vec{a})=(s\cdot t)\cdot\vec{a}=st\cdot\vec{a}$$

e) Distributivgesetze

$$(s+t)\cdot\vec{a}=s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{a}$$
$$s\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=s\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}$$

f) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ $(\forall s,t\in\mathbb{R},\ \forall\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n)$

Subtraktion:

$(-\vec{b}):=(-1)\cdot\vec{b},\quad \vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

- $\vec{a}^{\cdot}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ heißt der zu $\vec{a}$ gehörige *normierte Vektor*

Vektoren im $\mathbb{R}^2$

Punkte $P(p_1,p_2)$ und $Q(q_1,q_2)$

$$\vec{a}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} q_1-p_1\\ q_2-p_2\end{pmatrix}$$

Basisvektoren $\vec{i},\vec{j}$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\end{pmatrix}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Punkte $P(p_1,p_2,p_3)$ und $Q(q_1,q_2,q_3)$

$$\vec{a}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} q_1-p_1\\ q_2-p_2\\ q_3-p_3\end{pmatrix}$$

Basisvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

<u>Skalarprodukt</u>

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Länge der Projektion von $\vec{a}$ auf die durch $\vec{b}$ verlaufende Gerade ist $\left|\vec{a} \cdot \vec{b}^\circ\right|$.

<u>Rechengesetze des Skalarprodukts</u>

a) Kommutativgesetz $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

b) Distributivgesetz

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n)$

• *Skalarprodukt* im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

wobei $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Dabei ist $0 \leq \alpha \leq \pi$.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

• Formel zur Bestimmung des Winkels $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ$$

• Winkel zwischen $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und den Koordinatenachsen: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ berechnen sich aus

$$\alpha_1 = \arccos\frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \alpha_2 = \arccos\frac{a_2}{|\vec{a}|},\ \alpha_3 = \arccos\frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

Definition: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sind zueinander *orthogonal* bzw. *stehen aufeinander senkrecht*, falls $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Vektorprodukt

Definition: Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ist derjenige Vektor aus $\mathbb{R}^3$, für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ mit $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
- $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$,
- $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T, \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$.

- Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms $ABCD$ mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$:

$$F_{ABCD} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Flächeninhalt des Dreiecks ABD mit $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$:

$$F_{ABD} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

- Eigenschaften des Vektorprodukts:
  - a) Antikommutativgesetz
    $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
  - b) Distributivgesetze
    $(t \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t \cdot \vec{b}) = t \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (t \in \mathbb{R})$
    $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
    $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
  - c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
    $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3)$
  - d) Vektorprodukt bei Basisvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
    $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Spatprodukt

Definition: Das Spatprodukt $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ ist definiert durch

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

$$
\begin{aligned}
[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2)
\end{aligned}
$$

- $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] > 0 \Longrightarrow$ die Vektoren bilden ein Rechtssystem.
  $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] < 0 \Longrightarrow$ die Vektoren bilden ein Linkssystem.
  $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \Longrightarrow \vec{a} = \vec{o}$ oder $\vec{b} = \vec{o}$ oder $\vec{c} = \vec{o}$ oder $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen in einer Ebene.
- $\left|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\right|$ gibt das Volumen des Spats an, dass von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird.
  $\frac{1}{6}\left|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\right|$ gibt das Volumen des Tetraeders $ABCS$ mit den Kanten $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$ an

lineare Unabhängigkeit

DEFINITION: Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ heißen *linear unabhängig*, falls

$$\vec{o} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{b}_m$$

nur dann gilt, wenn $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ und $\ldots$ und $\lambda_m = 0$, anderenfalls sind die Vektoren *linear abhängig*.

Geometrische Anwendungen

Vektorielle Darstellung von Geraden

- *Punktrichtungsgleichung in Parameterform*

Gegeben seien ein Punkt P_0, der auf der Geraden g liegt, und ein Vektor $\vec{a}$, der die Richtung der Geraden g angibt.$\Longrightarrow$

$$g : \vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{a} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$\vec{x}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Geraden, $\overrightarrow{OP_0} = \vec{x}_0$,
t ist der Parameter.

- *Zweipunktegleichung*

Gegeben seien die Punkte P_1, P_2, die auf der Geraden g liegen.$\Longrightarrow$

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \quad (t \in \mathbb{R}),\ \vec{x}, t \text{ wie oben.}$$

Ebenen

Vektor $\vec{x} = (x, y, z)$ ist Ortsvektor eines beliebigen Punkt der Ebene.

- *allgemeine Gleichung (parameterfreie Darstellung)*

$$E : Ax + By + Cz + D = 0$$

$A, B, C, D \in \mathbb{R},\ D < 0$ fest vorgegebene Zahlen

- *Vektorielle Form der Ebenengleichung - Parameterdarstellung*:

Gegeben seien die Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$, die auf der Ebene E liegen. $\Longrightarrow$

$$E : \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + u \cdot \overrightarrow{P_1P_3} \quad (t, u \in \mathbb{R})$$

t, u Parameter

$\triangleright$ Herleitung der allgemeinen Gleichung
Gegeben sei der Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ auf der Ebene E und Normalenvektor $\vec{n}$, der senkrecht auf der Ebene steht, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$.

$$E : \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

Normalenvektor zum Beispiel $\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$
$\triangleright$ Abstand d eines Punktes P von der Ebene E, auf der der Punkt P_0 liegt und die den Normalenvektor $\vec{n}$ besitzt:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

Basis

DEFINITION: Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^n$ bilden eine *Basis* des $\mathbb{R}^n$, falls sie linear unabhängig sind. $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ heißen *Basisvektoren.*

SATZ: Es seien $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^n$ die Basisvektoren einer Basis. Dann lässt sich jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ darstellen, d.h.

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{b}_n$$

mit Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, die eindeutig bestimmt sind. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ heißen dann *Koordinaten* von $\vec{a}$ bezüglich der Basis.

Orthonormale Basis

DEFINITION: Die Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ heißt *orthonormale Basis* des $\mathbb{R}^n$, falls $|\vec{b}_i| = 1$ für alle i und je zwei Basisvektoren orthogonal zueinander sind, d.h.

$$\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j,\; j, i = 1 \ldots n.$$

SATZ: Ist $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\} \in \mathbb{R}^n$ eine orthonormale Basis, dann gilt für alle Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{b}_n \;\text{ mit } \lambda_i = \vec{a} \cdot \vec{b}_i \;\; (i = 1 \ldots n).$$

4. Matrizen

$$\begin{aligned} \text{Einheitsmatrix } E &= I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{Nullmatrix } \mathcal{O} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{Diagonalmatrix } \operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n) &= \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alles quadratische Matrizen.

Einfache Operationen mit Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

• ADDITION zweier Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{n,m}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

• Rechengesetze:

a) Kommutativgesetz $A + B = B + A$

b) Assoziativgesetz

$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

$(A, B, C \in \mathbb{R}^{n,m})$

• MULTIPLIKATION einer Matrix mit einer reellen Zahl $t \in \mathbb{R}$:

$$t \cdot A = \begin{pmatrix} t \cdot a_{11} & t \cdot a_{12} & \dots & t \cdot a_{1m} \\ t \cdot a_{21} & t \cdot a_{22} & \dots & t \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t \cdot a_{n1} & t \cdot a_{n2} & \dots & t \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

• Rechengesetze:

a) Kommutativgesetz $t \cdot A = A \cdot t$

b) Assoziativgesetz $s \cdot (t \cdot A) = (s \cdot t) \cdot A$

c) Distributivgesetze $(s + t) \cdot A = s \cdot A + t \cdot A$

$(s - t) \cdot A = s \cdot A - t \cdot A$

$s \cdot (A + B) = s \cdot A + s \cdot B$

$s \cdot (A - B) = s \cdot A - s \cdot B$

$(s, t \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{n,m})$

• SUBTRAKTION:

$(-B) = (-1) \cdot B,$

$A - B = A + (-B) \quad (A, B \in \mathbb{R}^{n,m})$

Transponierte Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

• Regeln beim Rechnen mit transponierten Matrizen:

$$(A^T)^T = A, \quad (t \cdot A)^T = t \cdot A^T,$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad (t \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{n,m})$$

DEFINITION: Eine quadratische Matrix A heißt *symmetrisch*, falls $A^T = A$.

Rang

DEFINITION: Die Zahl r heißt *Rang* einer Matrix, falls die Matrix r linear unabhängige Spalten besitzt und, falls vorhanden, $r+1$ beliebig gewählte Spalten linear abhängig sind. Symbol: $r = \mathrm{Rg}(A)$.

SATZ: Für $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ gilt:
a) Die maximale Anzahl der unabhängigen Zeilen ist gleich der maximalen Anzahl der unabhängigen Spalten.
b)

$$0 \leq \mathrm{Rg}(A) \leq \min\{n, m\}$$

c) $\mathrm{Rg}(A) = 0$ gilt genau dann, wenn $A = \mathcal{O}$.

Matrizenmultiplikation

$A \cdot B = C,\ A \in \mathbb{R}^{n,m}, B \in \mathbb{R}^{m,q}, C \in \mathbb{R}^{n,q}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \forall i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots q$$

Produkt ist nur erklärt, wenn Verkettung vorliegt: Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von $B = m$.

• Rechengesetze des Produkts:
a) Assoziativgesetz
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,m}, B \in \mathbb{R}^{m,p}, C \in \mathbb{R}^{p,r}$
b) Distributivgesetze
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,m}, C \in \mathbb{R}^{m,p}$
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,m}, B, C \in \mathbb{R}^{m,p}$
$a(A \cdot B) = (aA) \cdot B = A \cdot (aB) \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n,m}, B \in \mathbb{R}^{m,p}, a \in \mathbb{R}$

c) bezüglich Transposition:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad (A \in \mathbb{R}^{n,m}, B \in \mathbb{R}^{m,p})$$

d) Eigenschaften der Einheitsmatrix:

$$A \cdot I_m = I_n \cdot A = A \quad (A \in \mathbb{R}^{n,m})$$

$\triangleright$ Beachte: Im allgemeinen gilt für die Matrizenmultiplikation nicht das Kommutativgesetz: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

• dyadisches Produkt ($\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$)

$$\vec{a} \cdot \vec{b}^T = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_m \end{pmatrix}$$

<u>Determinanten</u>

• Determinante einer zweireihigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

• Determinante einer dreireihigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$: sogenannte *Sarrus'sche Regel*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

DEFINITION: A_{ij} heißt *Adjunkte (algebraisches Komplement)* des Elements a_{ij} der Matrix A, falls $A_{ij} = (-1)^{i+j}A^*_{ij}$ und A^*_{ij} die Determinante der Matrix ist, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

• Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ bei $n \geq 2$:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad \text{Entwicklung nach } i\text{-ter Zeile}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad \text{Entwicklung nach } j\text{-ter Spalte}$$

Satz: Eine Determinante bleibt unverändert, wenn zu einer Zeile (oder Spalte) das Vielfache einer anderen Zeile (Spalte) addiert wird. Bei Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Multipliziert man eine Zeile mit einem Faktor, so multipliziert sich die Determinante mit diesem Faktor.

• Einige Regeln:

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \det(A), \\ \det(AB) &= \det(A) \cdot \det(B), \\ \det(t \cdot A) &= t^n \cdot \det(A), \\ \det(I) &= 1 \qquad (t \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{n,n}). \end{aligned}$$

Satz: Die n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\det(A) \neq 0, \quad A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n).$$

Inverse Matrizen

Definition: Die *inverse Matrix (Kehrmatrix, Inverse)* A^{-1} einer quadratischen Matrix A ist diejenige Matrix, für die gilt:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

• Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A, \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \quad (A, B \in \mathbb{R}^{n,n}) \\ (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} \text{ kontragrediente Matrix,} \end{aligned}$$

$$(t \cdot A)^{-1} = \frac{1}{t} A^{-1}, \;\; (t \in \mathbb{R}) \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

• Diagonalmatrizen $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$:

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$$

• Berechnung der Inversen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_{11} \dots A_{nn}$ sind die Adjunkten der Matrix.
Spezialfall $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Definition: Eine reguläre quadratische Matrix A heißt *orthogonal*, falls

$$A^{-1} = A^T \text{ oder äquivalent } AA^T = I$$

• Für orthogonale Matrizen gilt: $\det(A) = 1$ oder -1.
• Drehung eines Vektors um den Winkel α wird durch Multiplikation mit orthogonaler Matrix erzeugt:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

5. Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

in Matrix-Form:

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad (*)$$

$A \in \mathbb{R}^{n,m}$ Koeffizientenmatrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ Lösungsvektor, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ Vektor der rechten Seite.

Satz: In einem linearen Gleichungssystem kann zu einem Vielfachen einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile addiert werden, wobei die Lösungsmenge nicht verändert wird. Dies ist auch der Fall, wenn Zeilen vertauscht werden.

Das Gaußsche Lösungsverfahren

Anfangstableau:

x_1	x_2	$\ldots$	x_m	RS
a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1m}	b_1
a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2m}	b_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nm}	b_n

V Vertauschen von Zeilen bzw. Spalten

G Gaußoperationen bei #-Zeilen, PZ Pivotzeile

Schritt 1:

$$\xRightarrow{V} \begin{array}{|c|ccc|c|} \hline & x_{\cdot} & \ldots & x_{\cdot} & \text{RS} \\ \hline \text{PZ} & \square & \ldots & * & * \\ \# & * & \ldots & * & * \\ \# & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \# & * & \ldots & * & * \\ \hline \end{array} \xRightarrow{G} \begin{array}{|cccc|c|} \hline x_{\cdot} & x_{\cdot} & \ldots & x_{\cdot} & \text{RS} \\ \hline \square & * & \ldots & * & * \\ 0 & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * & * \\ \hline \end{array}$$

Schritt 2:

$$\xRightarrow{V} \begin{array}{|c|cccc|c|} \hline & x_{\cdot} & x_{\cdot} & \ldots & x_{\cdot} & \text{RS} \\ \hline & \square & * & \ldots & * & * \\ \text{PZ} & 0 & \square & \ldots & * & * \\ \# & 0 & * & \ldots & * & * \\ \# & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \# & 0 & * & \ldots & * & * \\ \hline \end{array} \xRightarrow{G} \begin{array}{|ccccc|c|} \hline x_{\cdot} & x_{\cdot} & x_{\cdot} & \ldots & x_{\cdot} & \text{RS} \\ \hline \square & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & \square & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \ldots & * & * \\ \hline \end{array}$$

$\square$ bedeutet eine von Null verschiedene Zahl, $*$ eine beliebige Zahl

• nach r Schritten:

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 2 & & r & r+1 & & m & & \\
\hline
x_\cdot & x_\cdot & \dots & x_\cdot & x_\cdot & \dots & x_\cdot & \text{RS} & \\
\hline
\square & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \\
0 & \square & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & r \text{ Zeilen} \\
0 & 0 & \ddots & * & * & \dots & * & * & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \square & * & \dots & * & * & \dots\dots\dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b^*_{r+1} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & n-r \text{ Zeilen} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b^*_n &
\end{array}
$$

$\vdots$ Parameter

Die Zahl r ist der Rang der Koeffizientenmatrix A.
Fall a) Ist entweder $r = n$ oder $b^*_{r+1} = \ldots = b^*_n = 0 \Longrightarrow$ Die letzten $n - r$ Zeilen können gestrichen werden. Die Variablen der Spalten $r + 1$ bis m sind die Parameter der Lösung. Weiter mit Rückrechnung.
Fall b) Eines der $b^*_{r+1} \ldots b^*_n \neq 0 \Longrightarrow$ Das System besitzt keine Lösung.

Satz: Sei entweder $r = n$ oder $b^*_{r+1} = \ldots = b^*_n = 0$. Im Fall $r = m$ liefert der Gaußsche Algorithmus die eindeutige Lösung des Gleichungssystems. Im Fall $r < m$ ergibt sich mit Hilfe des Algorithmus eine $m - r$-dimensionale Lösungsmanigfaltigkeit (Hyperebene), konkret unendlich viele Lösungen der Form:

$$\vec{x} = \vec{y}_0 + t_1\vec{y}_1 + t_2\vec{y}_2 + \ldots + t_{m-r}\vec{y}_{m-r} \; (t_1, t_2, \ldots, t_{m-r} \in \mathbb{R})$$

wobei $\vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{m-r} \in \mathbb{R}^m$ festzulegende Vektoren und $t_1, t_2, \ldots, t_{m-r} \in \mathbb{R}$ die Parameter sind. Für jeden Parametervektor $(t_1, t_2, \ldots, t_{m-r})$ ergibt sich eine Lösung. $\vec{y}_0$ ist eine Lösung von (*).

6. Das Eigenwertproblem

Definition: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, falls ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{o}$ existiert, so dass

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Ein solcher Vektor $\vec{x}$ heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ.

• numerische Bestimmung der Eigenwerte:
Lösen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ heißt *charakteristisches Polynom.*
$\Longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ seien die verschiedenen Lösungen der charakteristischen Gleichung, d.h. die Nullstellen von χ. $\rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.
• Bestimmung des Eigenvektors zu λ_i: eine Lösung $\vec{x}$ des Systems

$$A\vec{x} = \lambda_i \vec{x} \quad \text{suchen.}$$

SATZ: Gegeben seien verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ und zugehörige Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$. Dann sind diese Vektoren linear unabhängig.

SATZ: Die Matrix A^T besitzt dieselben Eigenwerte wie A, aber i.A. verschiedene zugehörige Eigenvektoren.

SATZ: Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Matrix mit den verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$. Dann gilt:
a) cA besitzt die Eigenwerte $c\lambda_1, \ldots, c\lambda_m$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$.
c) A^k besitzt die Eigenwerte $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$.
d) Ist $\lambda_i \neq 0 \; \forall i$, dann ist A regulär und A^{-1} besitzt die Eigenwerte $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_m^{-1}$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$.

7. Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist eine Zahlenfolge $\{a_n\}$.

Regeln zum Rechnen mit Grenzwerten

SATZ: $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ seien zwei Zahlenfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) &= a \pm b, \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b} \text{ falls } b \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|, \\
\lim_{n\to\infty} a_n^m &= a^m \; (m > 0, a_n \geq 0), \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.
\end{aligned}$$

SATZ: a) rationale Funktion von n mit $A_k, B_l > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \ldots + A_0}{B_l n^l + B_{l-1} n^{l-1} + \ldots + B_0} = \begin{cases} +\infty & \text{für } k > l \\ \frac{A_k}{B_l} & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k < l \end{cases}$$

b) Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} e \quad &:= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{"}1^\infty\text{"} \\ e^x \quad &:= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{"}1^\infty\text{"} \end{aligned}$$

$e = 2.718281828459$ Euler-Zahl

c) Wurzeln

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ für } a > 0$$

d) Logarithmen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

<u>Reihen</u>

Gegeben sei eine Zahlenfolge $\{a_n\}$. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist die n-te Partialsumme.

$$\textit{Summenwert der Reihe}: \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

<u>geometrische Reihe</u>

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left(a_0 q^k\right) &= a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ falls } |q| < 1. \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_0 q^k\right) &= a_0 \frac{1}{1 - q}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_0 q^k\right) &= a_0 \frac{q}{1 - q} \end{aligned}$$

spezielle Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} = \begin{cases} \text{konvergent für } \alpha > 1 \\ \text{divergent für } \alpha \le 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

SATZ: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ konvergent $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = a + b \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot a$$

und die Reihen sind konvergent.

Regeln zum Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen

SATZ: f und g seien zwei Funktionen mit $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$. $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \qquad \lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ falls } B \neq 0, \qquad \lim_{x\to a} (f(x))^m = A^m \quad (m > 0, A > 0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \ldots + A_0}{B_l x^l + B_{l-1} x^{l-1} + \ldots + B_0} = \begin{cases} +\infty & \text{für } k > l, k-l \text{ gerade} \\ \pm\infty & \text{für } k > l, k-l \text{ ungerade} \\ \frac{A_k}{B_l} & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k < l,\ A_k, B_l > 0 \end{cases} \qquad A_k, B_l > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \quad (\alpha > 0),$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty \text{ für } \alpha \text{ gerade} \\ -\infty \text{ für } \alpha \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

8. Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

Die Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Regeln zur Bildung der Ableitung

a) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ b) $(cf(x))' = cf'(x)$

c) Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

d) Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{falls } g(x) \neq 0$$

e) Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

f) logarithmische Ableitung

$$f'(x) = (\ln f(x))' \cdot f(x)$$

g) Ableitung der Umkehrfunktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
c Konstante	0
x^m $(m \in \mathbb{R}, m \neq 0)$	mx^{m-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{(\cosh x)^2}$

• Gleichung der Tangente in x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

DEFINITION: f sei auf $[a, b]$ differenzierbar.
$f'(x) > 0 \; \forall x \in [a, b] \Longrightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$.
$f'(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b] \Longrightarrow f$ ist monoton wachsend auf $[a, b]$.
$f'(x) < 0 \; \forall x \in [a, b] \Longrightarrow f$ ist streng monoton fallend auf $[a, b]$.
$f'(x) \leq 0 \; \forall x \in [a, b] \Longrightarrow f$ ist monoton fallend auf $[a, b]$.

DEFINITION: f sei zweimal differenzierbar auf $[a, b]$.
a) $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in [a, b] \Longrightarrow \; f$ ist konvex auf $[a, b]$.
b) $f''(x) \leq 0 \; \forall x \in [a, b] \Longrightarrow \; f$ ist konkav auf $[a, b]$.

Regel von Bernoulli und l'Hospital

SATZ: f und g seien auf (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. $\Longrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert oder $+\infty$ oder $-\infty$ ist. Entsprechendes gilt auch für Grenzprozesse $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$ (einheitlich für f, g und Quotient).

Extremwerte

SATZ: f auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar, $f'(x_0) = 0$ mit $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:
a) $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \; f$ hat in x_0 ein *lokales Minimum*, x_0 ist *lokale Minimalstelle.*
b) $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \; f$ hat in x_0 ein *lokales Maximum*, x_0 ist *lokale Maximalstelle.*

Wendestellen

DEFINITION: Die Stelle x_0 heißt *Wendestelle* von f, falls es x_1 und x_2 mit $x_1 < x_0 < x_2$ gibt, so dass f auf $[x_1, x_0]$ konkav und auf $[x_0, x_2]$ konvex oder umgekehrt.

Satz: f sei dreimal stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt für $x_0 \in (a, b)$:

$$f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0 \Longrightarrow f \text{ hat in } x_0 \text{ einen Wendepunkt, } x_0 \text{ ist Wendestelle.}$$

Satz: f sei auf $[a, b]$ n-mal stetig differenzierbar ($n \geq 2$) und

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

für ein $x_0 \in (a, b)$.
a) Ist n ungerade, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.
b) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.
c) Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Taylorpolynom

Definition: Die Funktion f sei n-mal differenzierbar auf einem Intervall $[a, b]$. Dann heißt das Polynom

$$p_n(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

n-tes *Taylorpolynom* von f an der Entwicklungsstelle $x_0 \in (a, b)$.
Taylorentwicklung:

$$f(x) = p_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)$$

mit *Restglied* n-ter Ordnung R_n

Satz: $f^{(n+1)}$ stetig $\Longrightarrow$

$$R_n(x; x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

mit ξ zwischen x und x_0. $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0), \vartheta \in (0, 1)$

Das Newton-Verfahren

Gesucht ist eine Nullstelle x_N einer stetigen Funktion f, d.h. eine Lösung x_N der Gleichung

$$f(x_N) = 0.$$

Startwert x_0

Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

9. Komplexe Zahlen

Die imaginäre Einheit j ist diejenige Zahl, für die $j^2 = -1$ gilt.
Komplexe Zahl $z = a + bj \in \mathbb{C}$
$a = \mathrm{Re}(z)$ Realteil, $b = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil $(a, b \in \mathbb{R})$

Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} (a+bj)+(c+dj) &= (a+c)+(b+d)j \\ (a+bj)-(c+dj) &= (a-c)+(b-d)j \end{aligned}$$

$$(a+bj)\cdot(c+dj) = (ac-bd)+(bc+ad)j$$

$$\frac{a+bj}{c+dj} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}j$$

$$(c+dj)(c-dj) = c^2 - d^2j^2 = c^2 + d^2$$

- $\bar{z} = a - bj$ ist die zu $z = a + bj$ gehörige *konjugiert komplexe Zahl.*

$$\begin{aligned} \overline{x+y} &= \bar{x}+\bar{y}, \qquad \overline{x-y} = \bar{x}-\bar{y}, \\ \overline{x\cdot y} &= \bar{x}\cdot\bar{y}, \qquad \overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}, \qquad \bar{\bar{x}} = x \qquad (x, y \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

- *Betrag* einer komplexen Zahl z: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\begin{aligned} z\cdot\bar{z} &= |z|^2, \qquad |\bar{z}| = |z|, \\ |xy| &= |x||y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad (x, y \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung:

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Formeln für die Eulersche Darstellung komplexer Zahlen

- Euler-Formel

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

$$z = a + bj = re^{j\varphi} = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$r = |z|$ *Betrag*, $\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ *Argument (Phase)* von z
Berechnung des Betrages und des Arguments von $z = a + bj$:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2}, \\ \varphi &= \arccos\frac{a}{r} \quad \text{falls } b \geq 0 \text{ (I.+II.Quadrant)} \\ \varphi &= -\arccos\frac{a}{r} \quad \text{falls } b < 0 \text{ (III.+IV.Quadrant)} \end{aligned}$$

weitere Formeln:

$$\begin{aligned} |e^{j\varphi}| &= 1, \quad \arg e^{j\varphi} = \varphi \\ \overline{e^{j\varphi}} &= e^{-j\varphi}, \quad \bar{z} = r \cdot e^{-j\varphi} \end{aligned}$$

$$e^{j0} = 1, \quad e^{j\pi/2} = j, \quad e^{j\pi} = -1, \quad e^{j(-\pi/2)} = -j, \quad e^{j2\pi} = 1$$

- Formeln von de Moivre:

$$\text{a)} \quad e^{j\varphi}e^{j\psi} = e^{j(\varphi+\psi)}, \quad \text{b)} \quad (e^{j\varphi})^n = e^{jn\varphi}, \quad \text{c)} \quad \overline{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi}$$

$$\text{d)} \ \left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)$$

- Periodizität

$$e^{j(\varphi+2\pi)} = e^{j\varphi}, \quad e^{j(\varphi+2k\pi)} = e^{j\varphi} \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Für die beiden komplexen Zahlen $z_1 = re^{j\varphi}$ und $z_2 = qe^{j\psi}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= rqe^{j(\varphi+\psi)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{q}e^{j(\varphi-\psi)}, \\ z_1^n &= r^n \cdot e^{jn\varphi}, \quad \bar{z}_1 = r \cdot e^{-j\varphi} \end{aligned}$$

- Zu lösen ist die Gleichung

$$z^n = u \tag{*}$$

für $z \in \mathbb{C}$ (n-*te Wurzel* von u), u, n vorgegeben. Umwandlung von u in Euler-Darstellung:

$$u = re^{j\varphi}$$

$\Longrightarrow$ die n Lösungen der Gleichung (*):

$$z_k = r^{1/n}e^{j\varphi_k} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k \quad \text{für } k = 0\ldots(n-1),$$

Differenzwinkel $\frac{2\pi}{n}$