Aufgaben der Großübungen zur Vorlesung "Mathematik für KOMPASS"

GÜ 1

1. Gegeben sind die Mengen $A = \{x : x^2 \leq 4\}$, $B = [1,3]$, $C = [0,5)$, $D = (-1,0]$, $E = \{1, 2.5, -2\}$. Bestimmen Sie **a)** $A \cup B$, **b)** $A \cap B$, **c)** $A \cap C$, d) $A \backslash C$, e) $C \cup D$, f) $C \cap D$, g) $D \cap E$, h) $A \cup E$, i) $\mathbb{N} \cap B$, j) $\mathbb{R} \backslash A$. Welche zwei Mengen sind disjunkt?

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen

$$\textbf{a)} \quad 2x + 11 < 8x - 1, \quad \textbf{b)} \quad |x - 5| - 1 \leq 3x, \quad \textbf{c)} \quad \frac{x^2 + 4x - 8}{x + 2} < x$$

3. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \textbf{a)} \quad 3^x &= 11, \quad \textbf{b)} \quad 2^{x+1} + 3^x = 2^x + 3^{x+2} \\ \textbf{c)} \quad 8 + \sqrt{x - 1} &= x + 1, \quad \textbf{d)} \quad x^4 - 10x^2 = \frac{30x^2}{x - 3} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten

$$\text{a)} \ \binom{6}{3}, \quad \text{b)} \ \binom{15}{12}$$

5. Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{k=1}^{5} (k \cdot a_k),$$

wobei $a_1 = 2, a_2 = -2, a_3 = -1, a_4 = 3, a_5 = 1$. Wie groß ist das Produkt

$$\prod_{k=1}^{5} a_k \quad ?$$

6. Entwickeln Sie:

$$\left(a^2 + \frac{b}{a}\right)^4.$$

Vereinfachen Sie

$$\left(\sqrt{x^3} - 1\right)\left(\sqrt{x^3} + 1\right).$$

GÜ 2

1. Veranschaulichen Sie sich die folgenden Funktionen

$$
\begin{aligned}
&\textbf{a)}\quad f(x) = x^2, \quad \textbf{b)}\quad f(x) = x^3,\\
&\textbf{c)}\quad f(x) = 2x^3, \quad \textbf{d)}\quad f(x) = (x-1)^3,\\
&\textbf{e)}\quad f(x) = e^x, \quad \textbf{f)}\quad f(x) = e^{-x},\\
&\textbf{g)}\quad f(x) = e^{2x}, \quad \textbf{h)}\quad f(x) = \sin(x), \quad \textbf{i)}\quad f(x) = \cos(x)
\end{aligned}
$$

Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich an. Diskutieren Sie grundlegende Eigenschaften zum Verlauf der Kurven.

2. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9.$$

Geben Sie die Zerlegung des Polynoms in Linearfaktoren an.

3. Bestimmen Sie von der folgenden Funktion die Nullstellen, Pole und die Lücken

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x^2 - 10x + 21}.$$

Geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.

GÜ 3

1. Die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind vorgegeben.

a) Berechnen Sie $\vec{d} = -2\vec{b} + 4\vec{c}$ und den Winkel zwischen $\vec{b}$ und $\vec{d}$ (in Grad- und Bogenmaß).

b) Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{c}$ senkrecht aufeinander stehen.

c) Berechnen Sie $\vec{c}^{\circ}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.

2. Die Punkte $P_1(1,1,1), P_2(4,1,5), P_3(5,4,2)$ und $P_4(1,6,3)$ seien die Eckpunkte eines Tetraeders. Berechnen Sie:

a) die Längen der Seiten $\overrightarrow{P_2P_3}$ und $\overrightarrow{P_2P_4}$,

b) den Winkel $\alpha = \angle P_3P_2P_4$,

c) das Volumen des Tetraeders und

d) die Oberfläche der Grundseite $\triangle P_1P_2P_3$.

e) Sind die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ und $\overrightarrow{P_1P_4}$ linear unabhängig? Bitte eine Begründung angeben!

3. Wir betrachten die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie **a)** die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bzw. **b)** die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ auf lineare Unabhängigkeit. Bei Abhängigkeit ist die entsprechende Abhängigkeitsgleichung anzugeben.

4. Gegeben seien die Punkte $P_1(1,3,2)$, $P_2(5,1,5)$, $P_3(2,3,0)$, $P_4(4,0,-5)$, $P_5(1,4,1)$. Die Punkte P_1, P_2 liegen auf der Geraden g und die Punkte P_3, P_4, P_5 auf der Ebene E. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.

5. Gegeben sind die Punkte $P_1(2,3,0)$, $P_2(3,4,1)$, $P_3(4,3,-1)$, die auf der Ebene E liegen. Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene E und der Punkt $P_4(6,-7,4)$ liegt auf dieser Geraden. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E, der gleichzeitig Fußpunkt des Lotes von P_4 auf die Ebene ist. Wie groß ist der Abstand zwischen P_4 auf die Ebene E?

GÜ 4

1. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander liegen. Geben Sie einen Vektor $\vec{c}$ an, so dass $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Geben Sie unterVerwendung von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ eine orthonormale Basis an. Liegt damit ein Rechts- oder ein Linkssystem vor? Welcher Vektor $\vec{x}$ hat in dieser Basis die Koordinaten $(3, -12, 4)^T$? Man stelle den Vektor $\vec{y} = (1, 0, 2)^T$ in der neuen Basis dar.

2. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, $A + B$, $B + C$, $2C$, AB und BA.

3. Für einen zweistufigen Produktionsprozess sind die jeweiligen Bedarfsgrößen an Roh- und Zwischenprodukten in den folgenden beiden Tabellen zusammengefasst:

	E_1	E_2
Z_1	1	2
Z_2	8	7
Z_3	1	4
Z_4	2	0

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	4	1	3	1
R_2	1	0	1	6

R_1, R_2 bezeichnen die Rohstoffe, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 die Zwischenprodukte und E_1, E_2 die Endprodukte.

a) Bestimmen Sie die Gesamtverflechtungsmatrix von Rohstoffen und Endprodukten.

b) Berechnen Sie den Bedarf an Rohstoffen zur Produktion von 30 Einheiten E_1 und 10 Einheiten E_2.

c) Berechnen Sie die Rohstoffkosten zur Produktion der unter b) genannten Produktionsmenge für E_1 und E_2. Dabei sind für eine Einheit R_1 Kosten von 20 Euro und für eine Einheit R_2 von 30 Euro zu berücksichtigen.

4. Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2,2}$, für die die Gleichung

$$BX + A = \left(X^T A\right)^T + 2A$$

erfüllt ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie dabei zunächst die allgemeine Lösung ohne die speziellen Matrizen A und B einzusetzen.

5. Ermitteln Sie die Ränge der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Verwenden Sie für die Argumentation ggf. das Spatprodukt, die Determinante bzw. geometrische Betrachtungen.

6. Berechnen Sie die Determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

GÜ 5

1. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -3 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Geben Sie die Lösung in vektorieller Darstellung an.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 7 \\ -4x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 6x_5 &= -10 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 14 \\ 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 10x_5 &= 17 \end{aligned}$$

Wie groß ist der Rang der Koeffizientenmatrix?

GÜ 6

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie auch zugehörige Eigenvektoren an.

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zu jedem Eigenwert zugehörige Eigenvektoren an.

3. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie einen Eigenvektor zum größten Eigenwert.

<u>GÜ 7</u>

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-n^7}{2n^7+3n^2},\quad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^6+1}{n^4\left(n-3n^{-1}\right)},$$
$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+3}}{n\left(1+4\sqrt{n}\right)},\quad \text{d)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3\sqrt{n}}{2-5n^3},$$
$$\text{e)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n,\quad \text{f)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-1}\right)^n,$$
$$\text{g)}\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{7n+3}.$$

2. Berechnen Sie den Summenwert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\cdot 3^n 5^{-n}+6^{-n}\right).$$

3. Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2}{2x^4-1},\quad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{11x^4+x}{x-4}.$$

Was passiert, wenn im Limes $+\infty$ durch $-\infty$ ersetzt wird?

4. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}
\textbf{a)}\quad f(x) &= 5x^{1/3}-x^3\sin x,\quad \textbf{b)}\quad f(x)=\frac{e^x}{x^2+1},\\
\textbf{c)}\quad f(x) &= x^2e^{1/x},\quad \textbf{d)}\quad f(x)=\ln(\cos x),\quad \textbf{e)}\quad f(x)=\sqrt{x^4+4},\\
\textbf{f)}\quad f(x) &= \sin\left(\sqrt{x}+5\right),\quad \textbf{g)}\quad f(x)=x^3\ln x,\\
\textbf{h)}\quad f(x) &= \left(x^2+1\right)^{x^2}
\end{aligned}$$

5. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\textbf{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{e^{2x}-1},\quad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln(3x-2)}{x-1},$$
$$\textbf{c)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x-e^{-3x}}{x+e^{-x}},\quad \textbf{d)}\quad \lim_{x\to\pi/2}\sin(2x)\cdot\tan(x)$$

<u>GÜ 8</u>

1. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = e^{-x}\left(x^2 + 3x + 1\right).$$

Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte und die Wendepunkte der Funktion. Notieren Sie die Monotonieintervalle und die Intervalle, wo die Funktion konvex bzw. konkav ist.

2. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = xe^{1/\sqrt{x}}.$$

hinsichtlich des Definitionsbereiches, der Extremwerte und der Wendepunkte der Funktion.

3. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^2 + 4x + 4\ln(1 - x).$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Extremstellen der Funktion $f(x)$. Für welche x ist die Funktion monoton wachsend bzw. monoton fallend bzw. konvex bzw. konkav? Wo liegen die Wendepunkte der Funktion?

4. Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades der Funktion

$$f(x) = \sin(3x)$$

mit entsprechendem Restglied an der Stelle $\frac{\pi}{12}$ an. Diskutieren Sie die Größenordnung des Restgliedes für $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

5. Wir betrachten die Funktionen

$$\text{a) } f(x) = (x+1)^{1/x} \text{ und b) } f(x) = (x+2)^{1/x}.$$

Geben Sie den jeweiligen Definitionsbereich, die Polstellen und die Extremstellen an. Bestimmen Sie den Grenzwert an der Stelle 0?

GÜ 9

1. Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$u_1 = 2 + 4j, \quad u_2 = 3 + j, \quad u_3 = j^2 \frac{u_1}{u_2}, \quad u_4 = 2 + j.$$

Berechnen Sie $u_1 + u_2, u_1 - u_2, u_1 \cdot u_2, u_3$ und $2^{-35} u_3^{69}$. Wandeln Sie dazu u_3 in die Eulersche Darstellung um.

2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = \frac{8}{27} j$.

3. Geben Sie für die Mengen $\{z \in \mathbb{C} : z\,\bar{z} \leq 4\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq -\frac{\pi}{4}\}$ in der Gaußschen Zahlenebene eine geometrische Beschreibung an.

4. Gegeben ist das komplexe Polynom

$$f(z) = z^3 + jz^2 - (1 + j)\, z - 6 - 2j.$$

Bestimmen Sie die Nullstellen dieses Polynoms. Prüfen Sie dabei, ob 2 eine Nullstelle ist.

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 + j & 2 - j \\ 2 + j & 1 - j \end{pmatrix}.$$