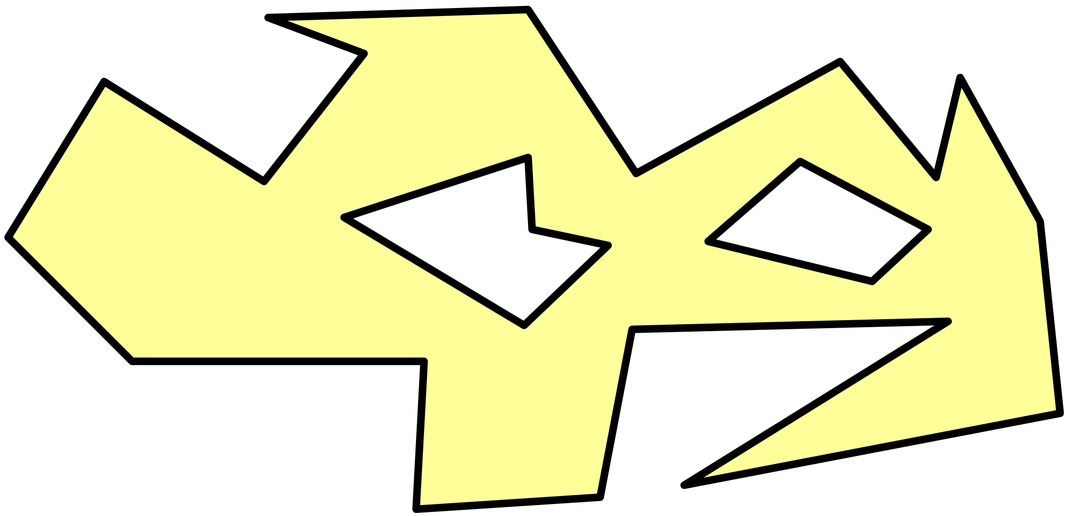
Der Kern eines Polygons

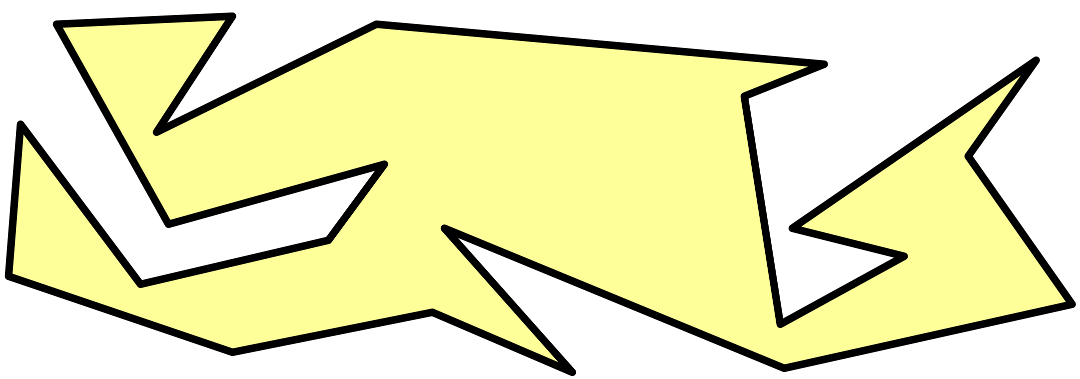
1. Verschiedene Typen von Polygonen

Wir kennen schon eine Reihe von unterschiedlichen Typen von Polygonen.

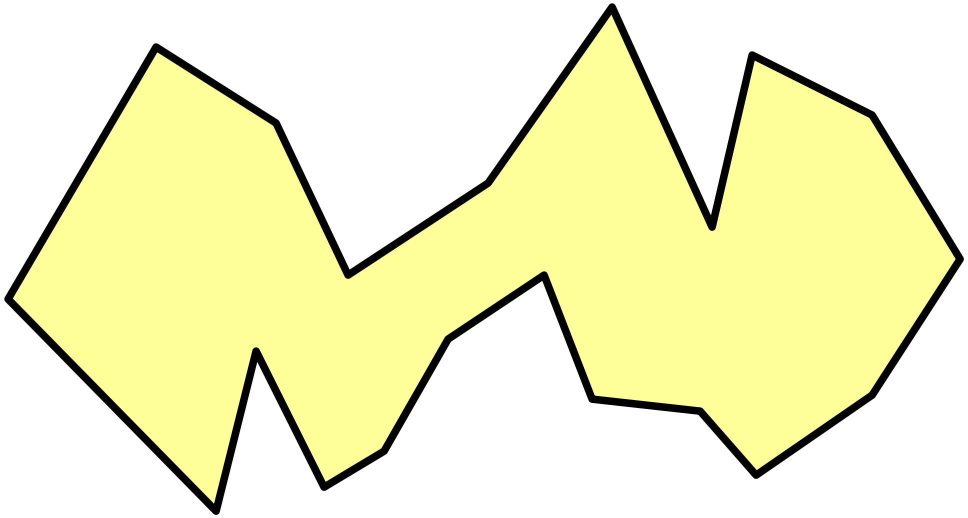
Polygone mit Löchern:



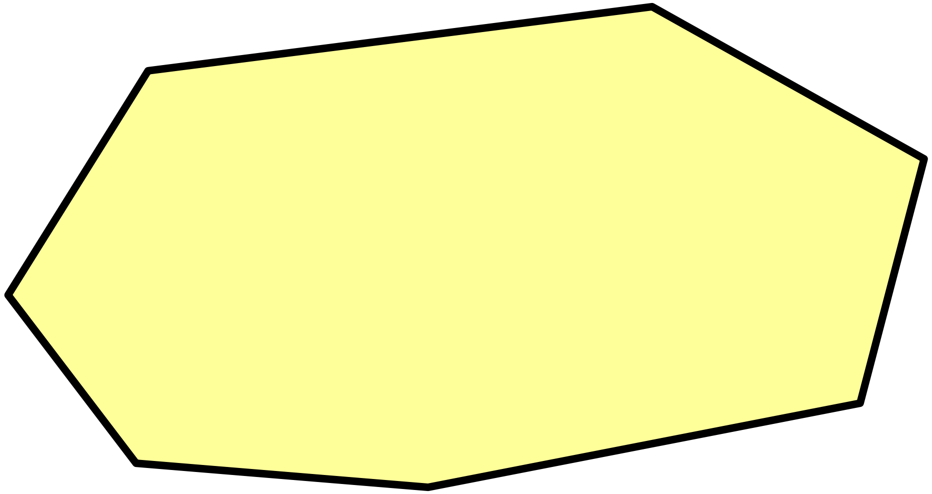
einfache Polygone:



x-monotone Polygone:

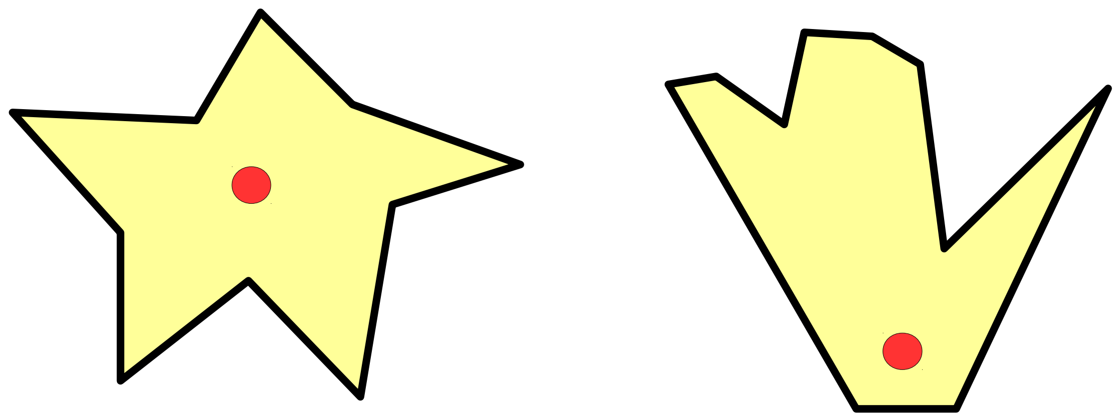


konvexe Polygone:

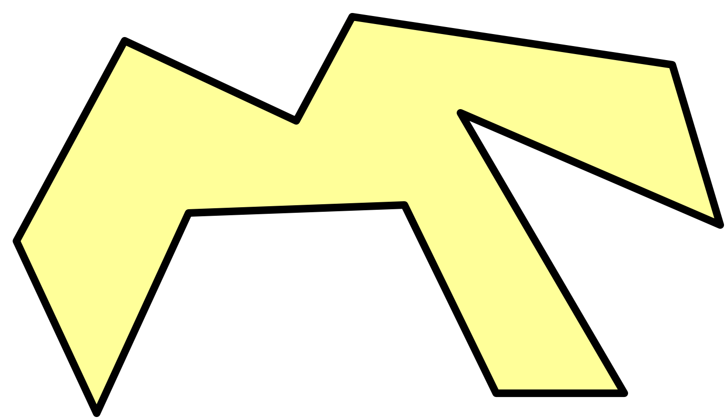


Ein einfaches Polygon P heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt q in P gibt, von dem aus ganz P sichtbar ist.

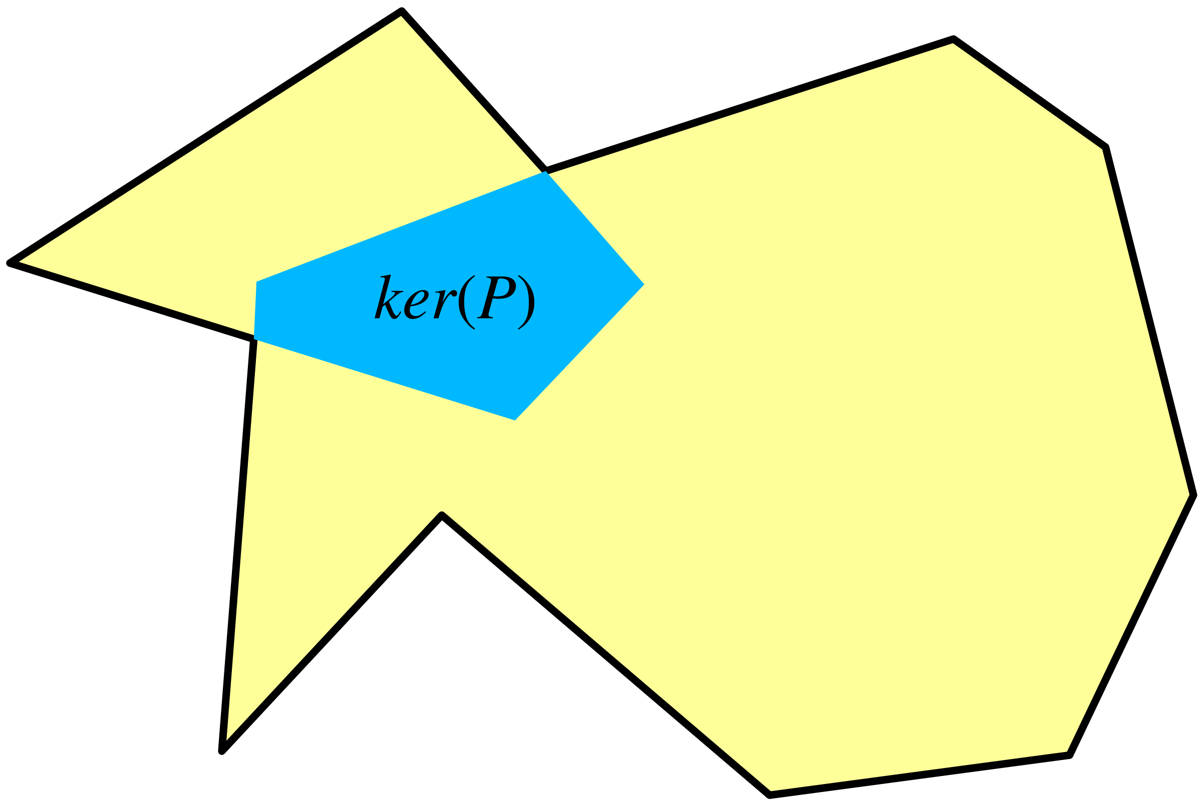
sternförmig:



nicht sternförmig:



Die Menge aller Punkte in P, die ganz P sehen, bezeichnen wir als den **Kern** von P. Sie wird auch kurz mit $ker(P)$ bezeichnet.

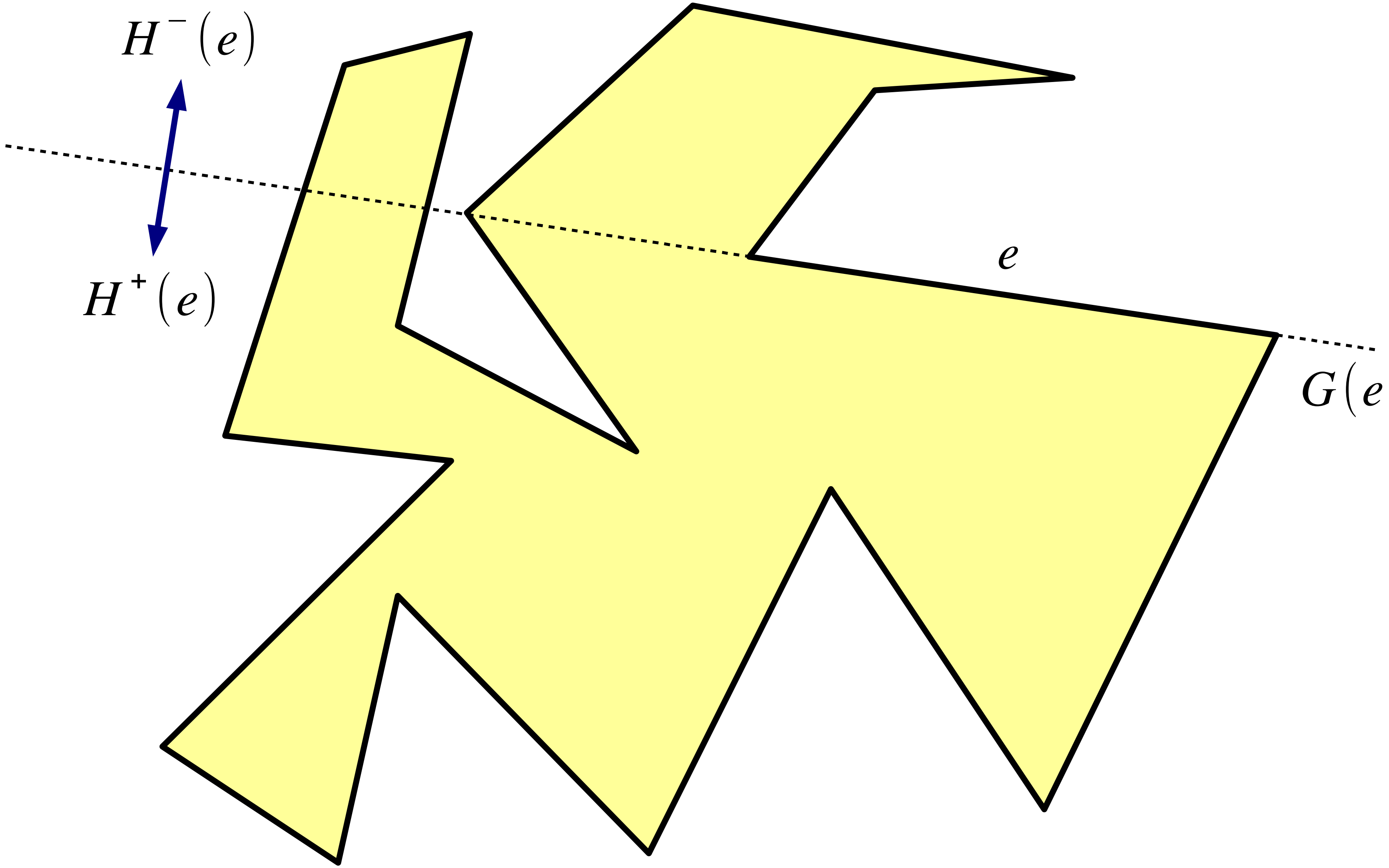


P ist genau dann sternförmig, wenn der Kern von P nicht leer ist.

2. Eigenschaften des Kerns

Sei P ein einfaches Polygon und e eine Kante von P. Dann ist

$G(e)$	die Gerade, die e enthält.
$H^{+}(e)$	die Halbebene, die durch $G(e)$ begrenzt wird und bei e das Innere von P schneidet.
$H^{-}(e)$	die Halbebene, die durch $G(e)$ begrenzt wird und bei e das Innere von P nicht schneidet.


$H^{-}(e)$
$H^{+}(e)$
e
$G(e)$

Lemma 1

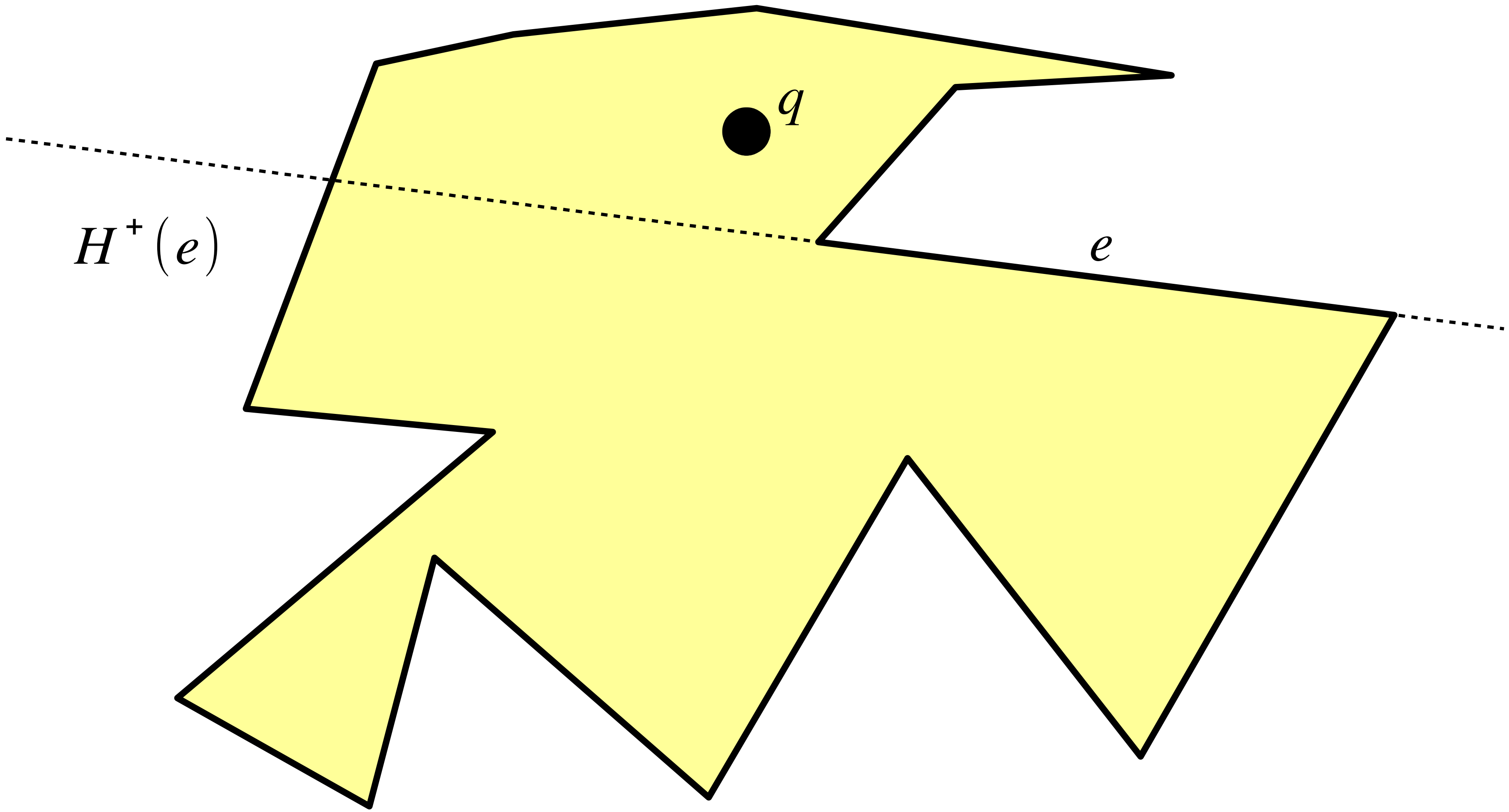
Sei P ein einfaches Polygon. Dann gilt: $ker(P) = \bigcap_{e \text{ Kante von } P} H^+(e)$.

Beweis:

1. Schritt: Sei q ein Punkt aus dem Kern von P.

Angenommen es gibt eine Kante e mit $q \notin H^+(e)$.

Dann kann q aber nicht im Kern liegen:



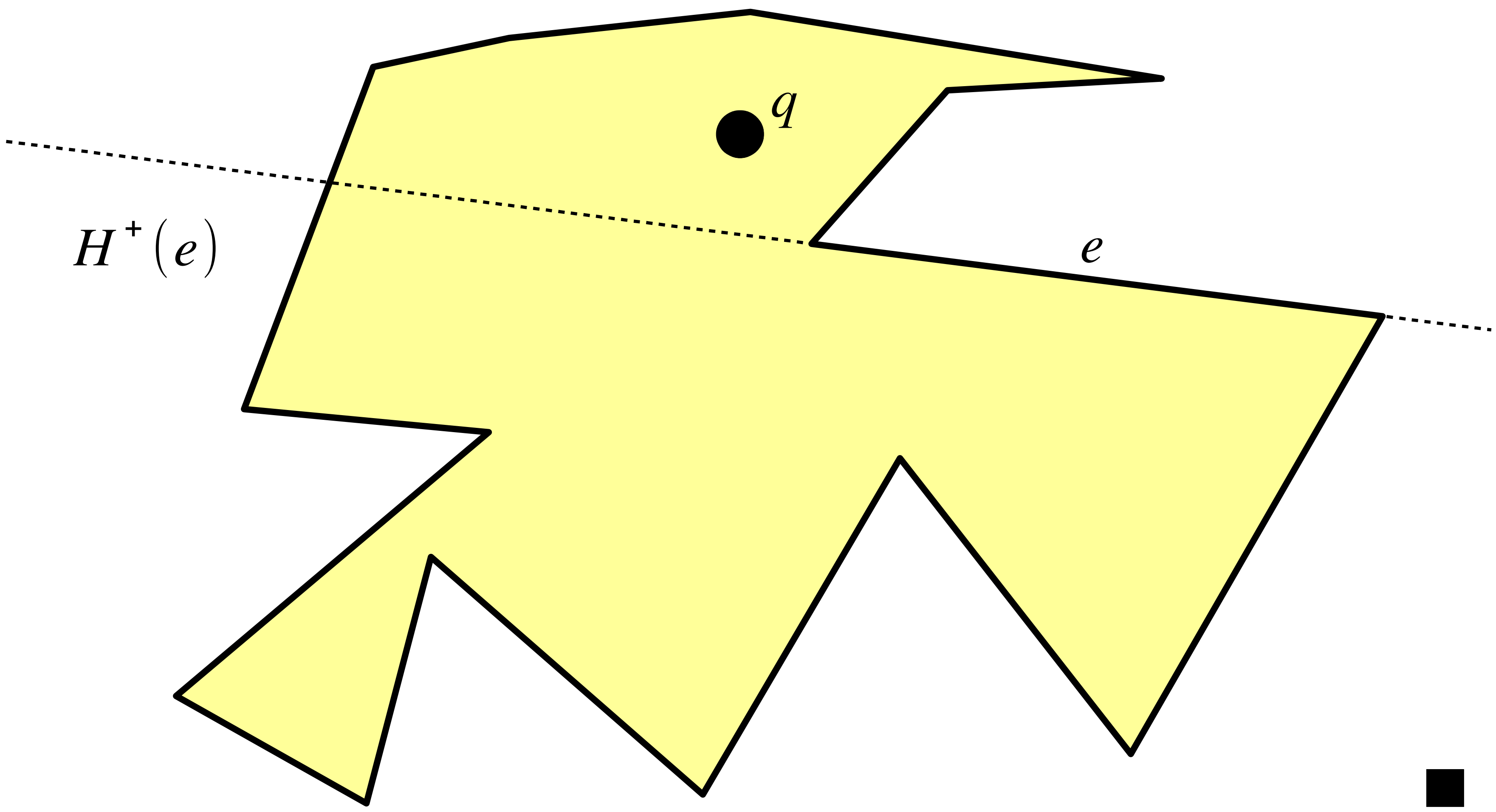
2. Schritt: Sei $q \in \bigcap_{e \text{ Kante von } P} H^{+}(e).$

Sicher liegt q dann in P.

Angenommen q liegt nicht im Kern von P.

Dann gibt einen Bereich von P, den man von q aus nicht einsehen kann.

Dann gibt es aber eine Kante e mit $q \notin H^+(e)$



3. Ein Algorithmus zur Berechnung des Kerns

Grundidee

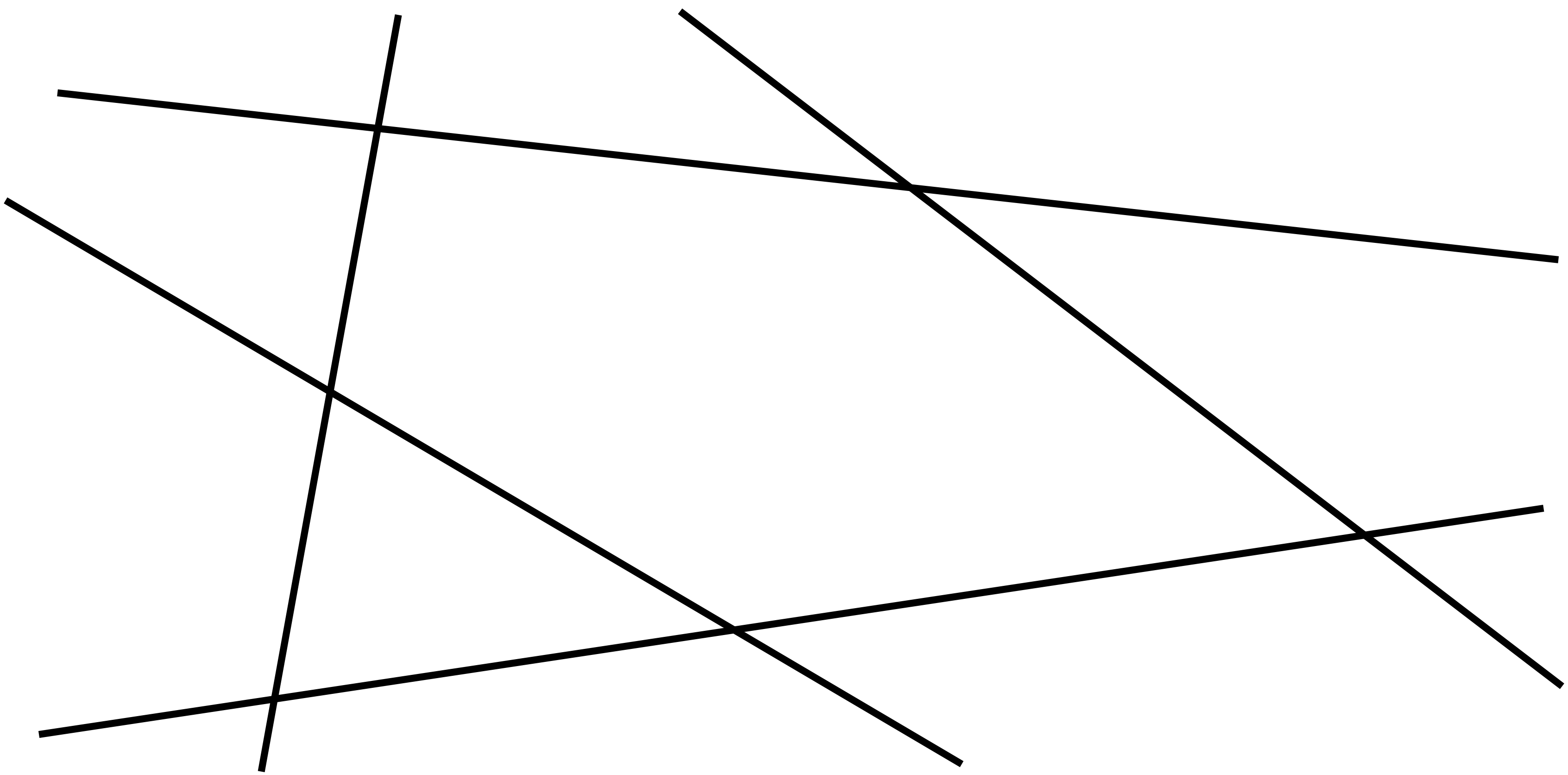
1. Bestimme für jede Kante e von P die Halbebene $H^+(e)$.

2. Berechne $\bigcap_{e \text{ Kante von } P} H^+(e)$.

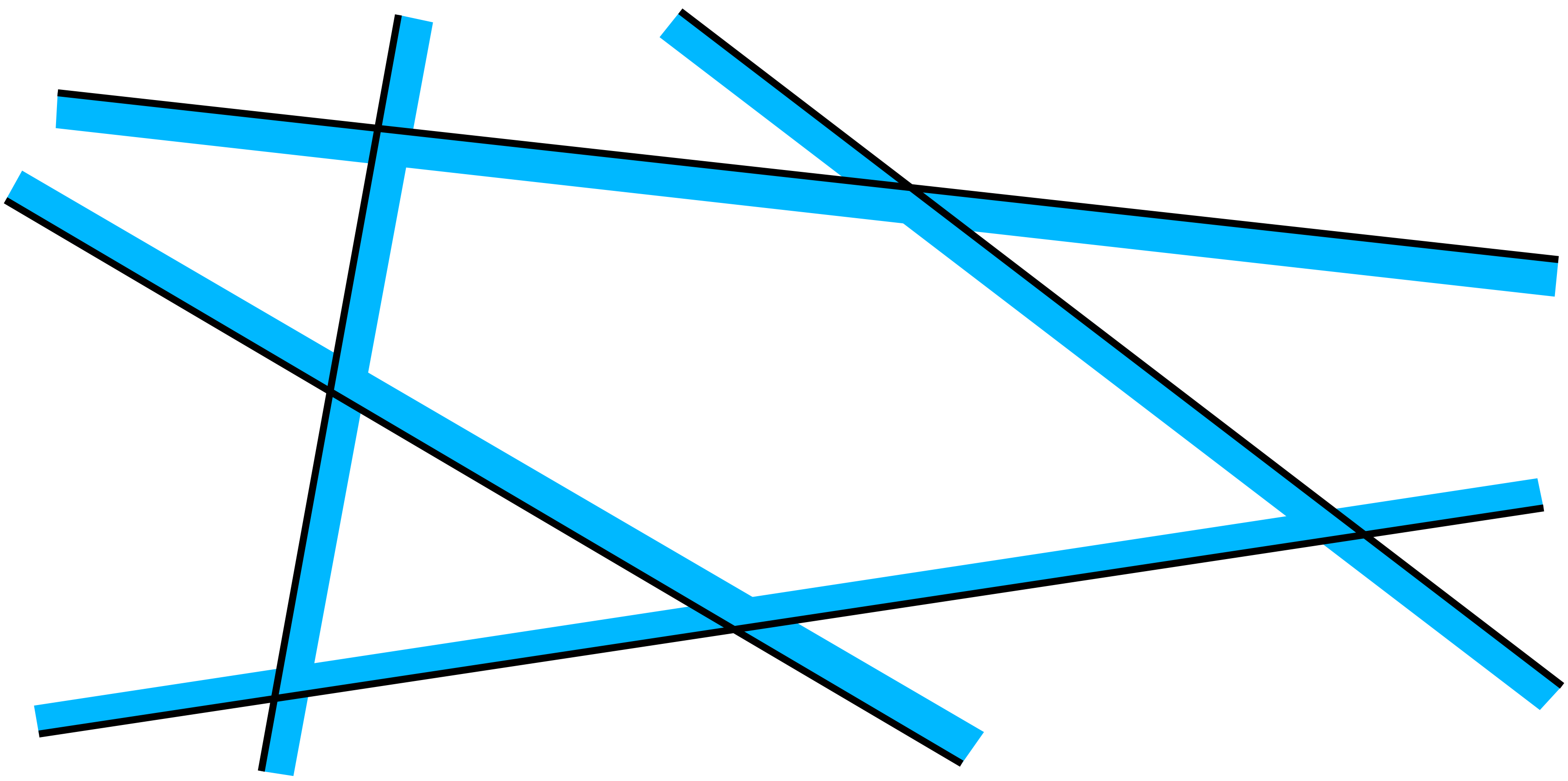
Wir brauchen also einen Algorithmus zur Berechnung des Durchschnitts von n Halbebenen.

Unsere Aufgabenstellung allgemein:

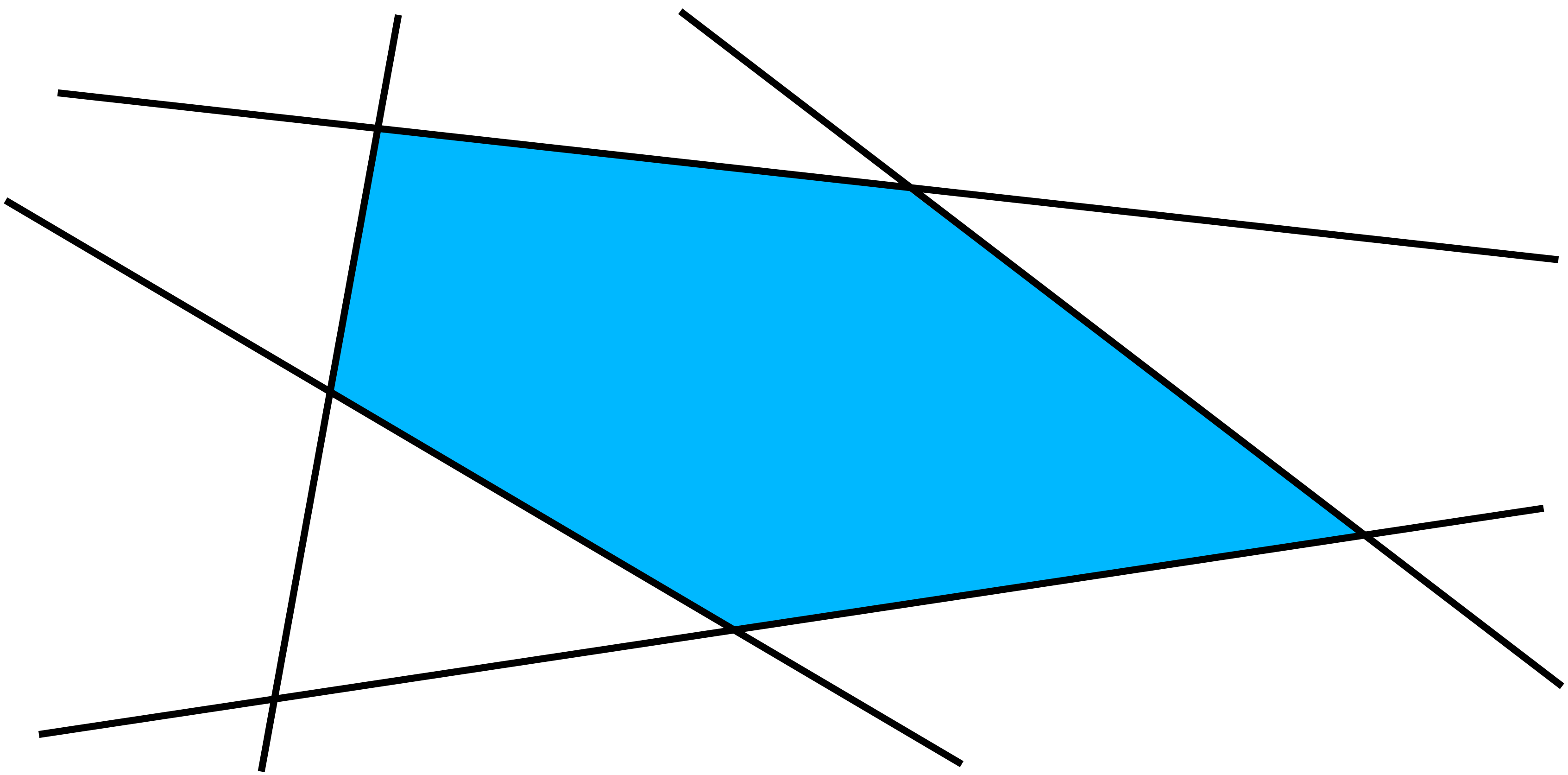
Gegeben ist eine Menge von Geraden.



Für jede dieser Geraden ist eine der durch sie begrenzten Halbebenen ausgezeichnet.



Gesucht ist nun der Durchschnitt dieser Halbebenen.



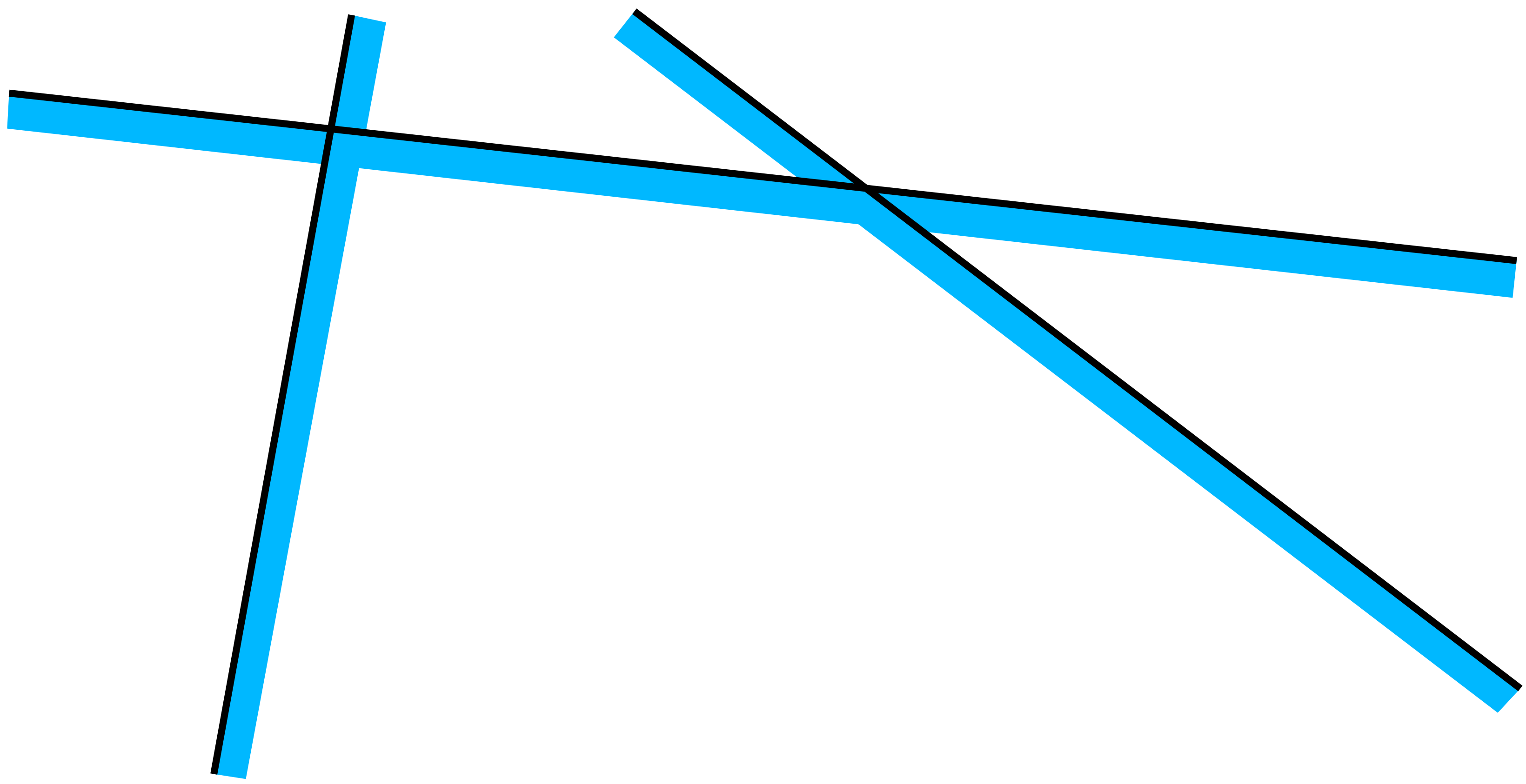
Vereinfachende Annahmen

Keine der Geraden ist senkrecht.

Die Geraden sind paarweise nicht parallel.

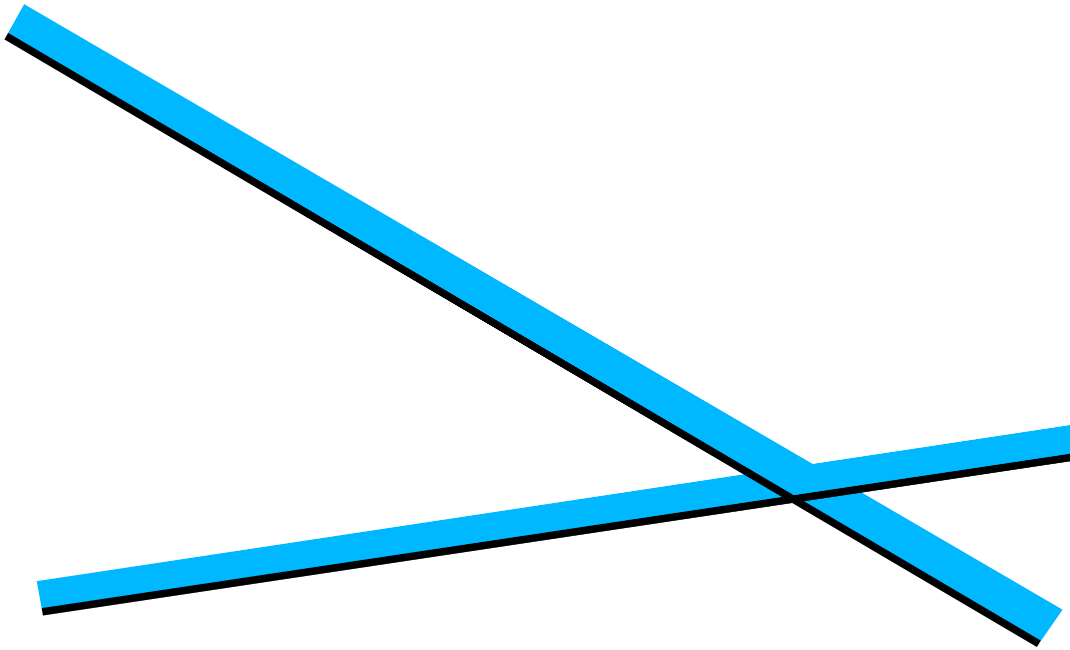
Zerlegung des Problems

Wir berechnen zuerst den Durchschnitt der unteren Halbebenen.



Zerlegung des Problems

Und dann den Durchschnitt der oberen Halbebenen.



Schnitt der unteren Halbebenen

Gegeben sind n Geraden $G_1, \dots, G_n$ wobei:

$$G_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a_i x + b_i\}$$

Die unteren Halbebenen lassen sich dann schreiben als:

$$H_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq a_i x + b_i\}$$

Und wir suchen eine endliche Beschreibung der Menge:

$$D = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

Wir möchten die Berechnung des Durchschnitts von unteren Halbebenen auf die Berechnung der **konvexen Hülle** einer Punktmenge zurückführen.

Dazu bilden wir die Menge der gegebenen **Geraden** mit einer geeigneten Abbildung auf eine Menge von **Punkten** ab:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\} \rightarrow G^* = (a, -b)$$

$$p = (a, b) \rightarrow p^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax - b\}$$

Ein solches Vorgehen bezeichnet man auch als **Dualisierung**.

Dualisierung

Offensichtlich gilt für jede Gerade G: $\left(G^*\right)^* = G$

Und für jeden Punkt p analog: $\left(p^*\right)^* = p$

Lemma 1:

Wenn ein Punkt p oberhalb von einer Geraden G liegt, dann liegt der Punkt G^* oberhalb der Geraden p^*.

Beweis von Lemma 1:

Seien: $p = (a, b)$ $G = \{(x, y) \mid y = cx + d\}$

Damit: $p^* = \{(x, y) \mid y = ax - b\}$ $G^* = (c, -d)$

Da p oberhalb von G liegt, gilt: $ca + d \leq b$

Daraus folgt sofort: $ac - b \leq -d$

Das bedeutet aber G^* liegt oberhalb von p^*. ■

Völlig analog ergeben sich:

Wenn ein Punkt p auf einer Geraden G liegt,
dann liegt der Punkt G^* auf der Geraden p^*.

Wenn ein Punkt p unterhalb von einer Geraden G liegt,
dann liegt der Punkt G^* unterhalb der Geraden p^*.

Dualisierung

Für zwei verschiedene Punkte p und q bezeichnen wir mit $G(p,q)$ die Gerade durch die Punkte p und q.

Lemma 2:

Für zwei Punkte $p=(a,b)$ und $q=(c,d)$ mit $a \neq c$ gilt:

$$p^* \cap q^* = \{G(p,q)^*\}$$

Beweis von Lemma 2:

Es gilt:

$$G(p,q) = \left\{ (x,y) \mid y = \frac{b-d}{a-c}\, x + \frac{ad-bc}{a-c} \right\}$$

$$p^* = \{ (x,y) \mid y = ax-b \} \qquad q^* = \{ (x,y) \mid y = cx-d \}$$

Damit:

$$p^* \cap q^* = \left\{ \left(\frac{b-d}{a-c}, -\frac{ad-bc}{a-c} \right) \right\} = \{ G(p,q)^* \}$$

■

Analog ergibt sich wieder:

Für zwei nicht parallele Geraden E und F gilt:

$$\left(E \cap F\right)^{*} = G\left(E^{*}, F^{*}\right)$$

Zurück zur Berechnung des Durchschnittes D der unteren Halbebenen $H_1, \ldots, H_n$:

Der Schnittpunkt p
der Geraden G_i und G_j
ist eine Ecke von D.

Zurück zur Berechnung des Durchschnittes D der unteren Halbebenen $H_1, \ldots, H_n$:

Der Schnittpunkt p
der Geraden G_i und G_j
ist eine Ecke von D.

$$\Updownarrow$$

p liegt unterhalb von G_k
für alle k mit $k \neq i, k \neq j$
und p liegt auf G_i und G_j.

Zurück zur Berechnung des Durchschnittes D der unteren Halbebenen $H_1, \ldots, H_n$:

Der Schnittpunkt p
der Geraden G_i und G_j
ist eine Ecke von D.

$\Updownarrow$

p liegt unterhalb von G_k
für alle k mit $k \neq i, k \neq j$
und p liegt auf G_i und G_j.

$\Leftrightarrow$

Für alle k mit $k \neq i, k \neq j$
liegt G_k^* unterhalb von p^*
und G_i^* und G_j^* liegen auf p^*.

Zurück zur Berechnung des Durchschnittes D der unteren Halbebenen $H_1, \ldots, H_n$:

Der Schnittpunkt p der Geraden G_i und G_j ist eine Ecke von D.

$\Longleftrightarrow$

Die Strecke zwischen G_i^* und G_j^* ist eine Kante der konvexen Hülle von $G_1^*, \ldots, G_n^*$.

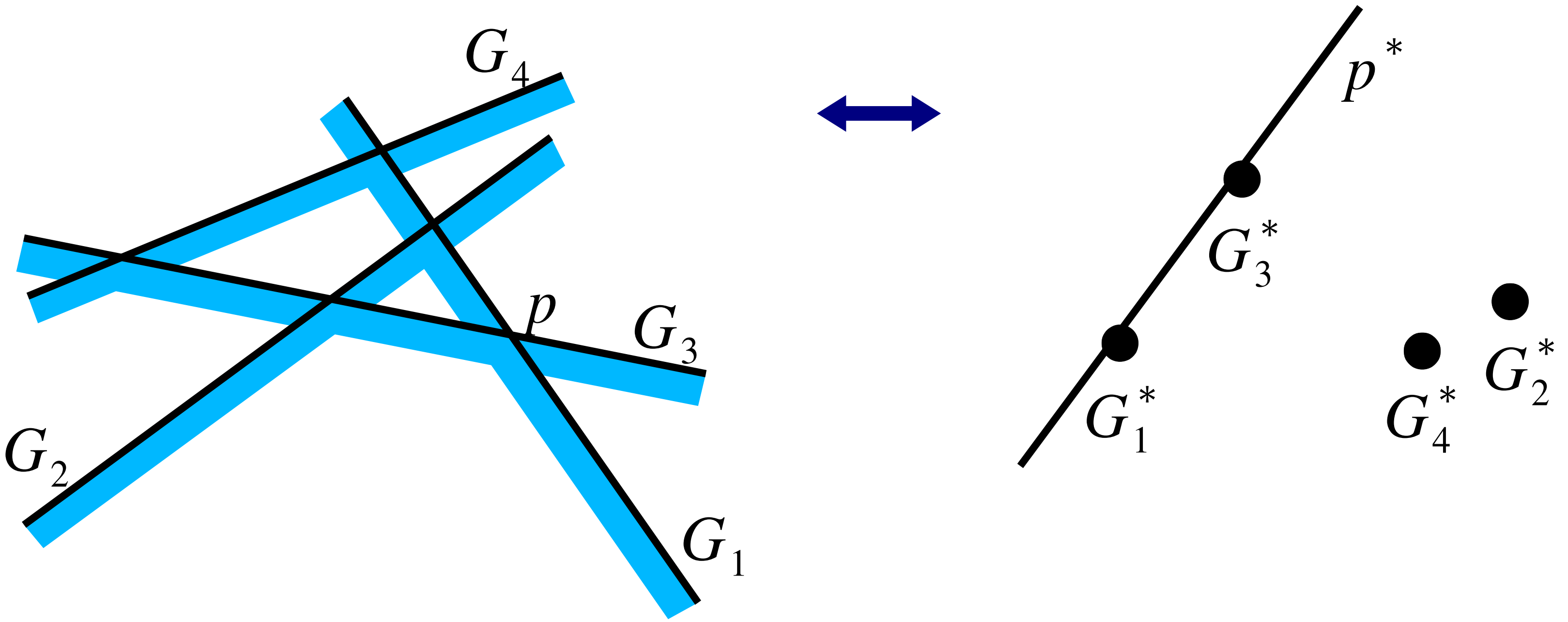
$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

p liegt unterhalb von G_k für alle k mit $k \neq i, k \neq j$ und p liegt auf G_i und G_j.

$\Longleftrightarrow$

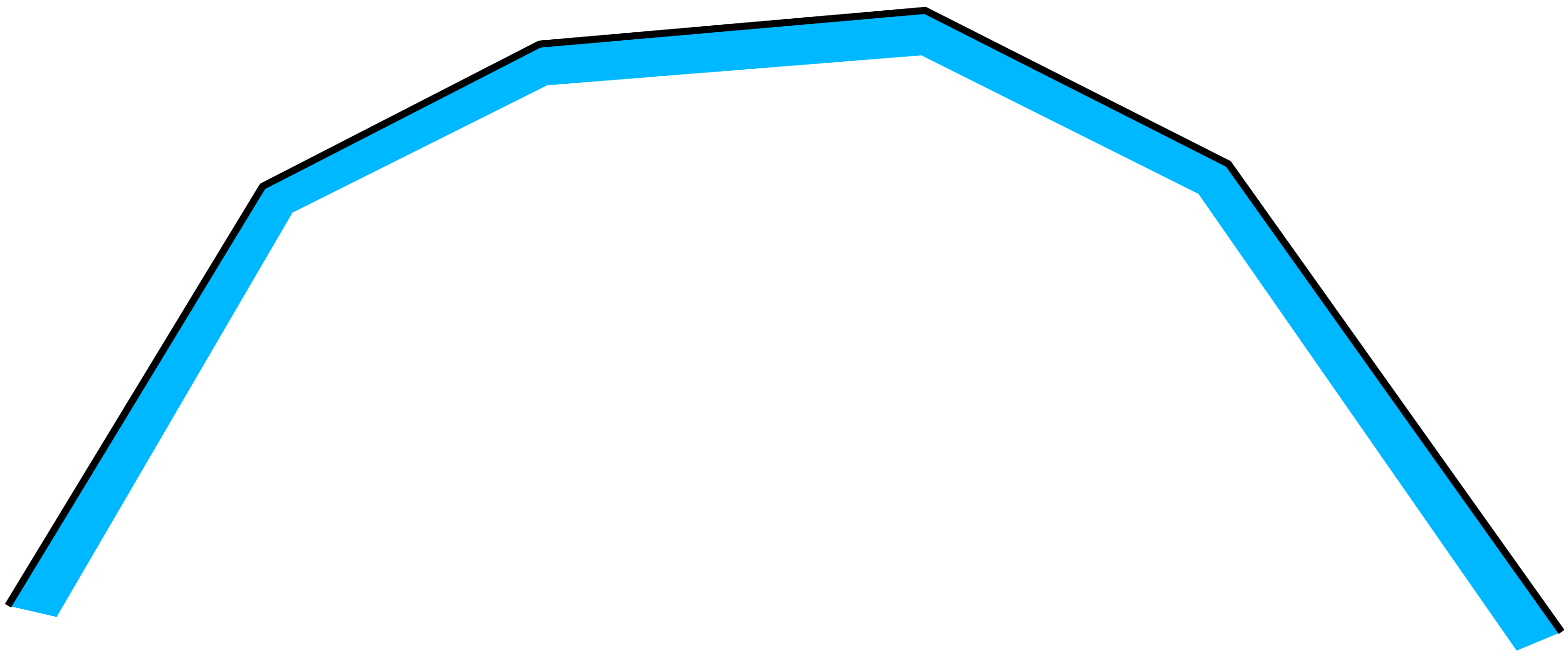
Für alle k mit $k \neq i, k \neq j$ liegt G_k^* unterhalb von p^* und G_i^* und G_j^* liegen auf p^*.

Anschaulich:

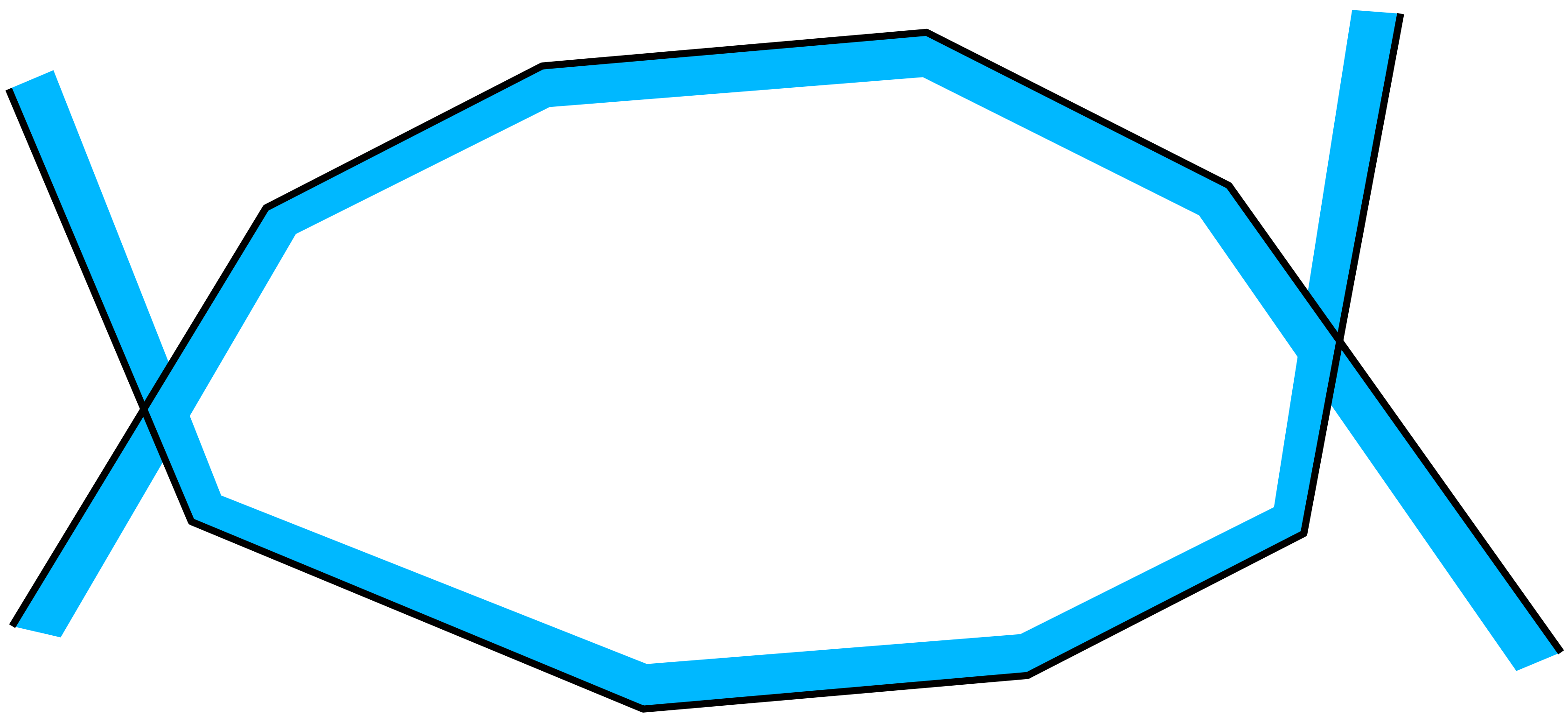


Zusammenfügen der Teillösungen

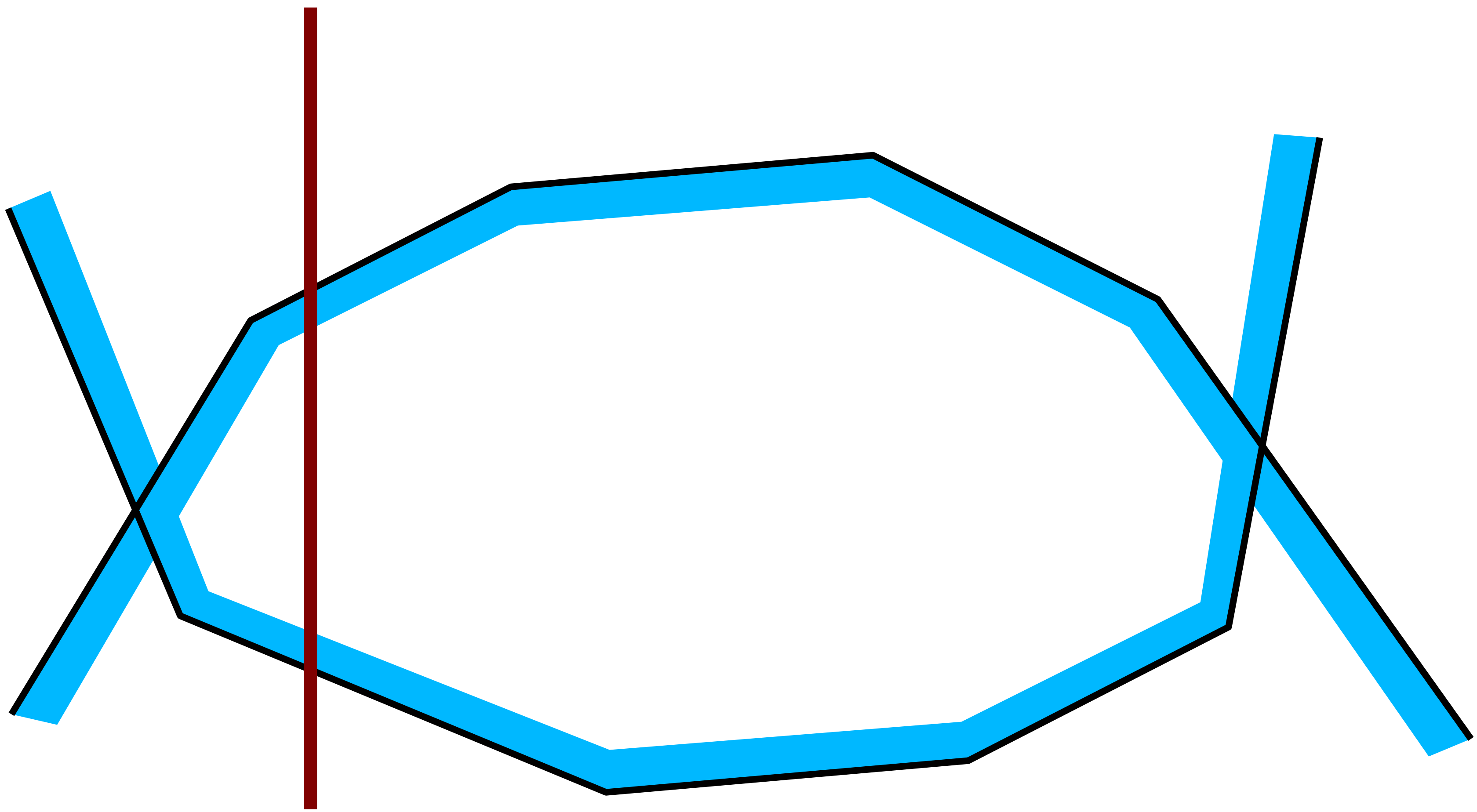
Der Durchschnitt der unteren Halbebenen und der analog berechnete Durchschnitt der oberen Halbebenen müssen nun noch zum Schnitt gebracht werden.



Der Durchschnitt der unteren Halbebenen und der analog berechnete Durchschnitt der oberen Halbebenen müssen nun noch zum Schnitt gebracht werden.



Wir erledigen dies mit dem Gleitgeradenalgorithmus zur Bestimmung der Schnittpunkte einer Menge von Strecken.



Zusammenfassung der Schritte des Algorithmus

Übergang zur Menge von Punkten:	$O(n)$
Berechnung der konvexen Hülle:	$O(n \log n)$
Zurück zu den Halbebenen:	$O(n)$
Zusammenfügen der Teillösungen:	$O(n \log n)$

Laufzeit insgesamt: $O(n \log n)$

Folgerung:

Für ein einfaches Polygon mit n Ecken kann der Kern in $\boldsymbol{O(n \log n)}$ **Zeit** berechnet werden.

Ausblick:

Ahnlich wie bei der Berechnung des sichtbaren Bereichs von einem Punkt in einem einfachen Polygon mit n Ecken kann der Kern sogar in $\boldsymbol{O(n)}$ **Zeit** berechnet werden.