1. Aufgabenblatt Diskrete Mathematik
SS 2019

1. Geben Sie für die aussagenlogische Formel F und die Belegung β jeweils an, wie sich der Wahrheitswert $I_\beta(F)$ schrittweise gemäß der induktiven Definition berechnet.

   (a) $F = ((A_1 \vee A_2) \Rightarrow A_3), \quad \beta(A_1) = f,\ \beta(A_2) = f,\ \beta(A_3) = w$

   (b) $F = ((A_1 \wedge A_3) \vee (A_1 \Leftrightarrow A_2)), \quad \beta(A_1) = w,\ \beta(A_2) = f,\ \beta(A_3) = w$

2. Ist die aussagenlogische Formel F erfüllbar?

   (a) $F = ((A_1 \Rightarrow A_2) \wedge A_3)$

   (b) $F = (((A_1 \vee (\neg A_3)) \wedge (A_1 \vee A_3)) \wedge (((\neg A_1) \vee A_2) \wedge ((\neg A_1) \vee (\neg A_2))))$

   (c) $F = (((A_1 \vee (\neg A_2)) \wedge (A_2 \vee A_3)) \wedge (((\neg A_3) \vee (\neg A_1)) \wedge ((\neg A_1) \vee A_3)))$

3. Eine aussagenlogische Formel F ist in disjunktiver Normalform (DNF), wenn sie die Gestalt

   $$F = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee \cdots \vee C_n$$

   hat mit

   $$C_i = (L_{i,1} \wedge L_{i,2} \wedge \cdots \wedge L_{i,l_i}).$$

   Dabei sind die $L_{i,j}$ aussagenlogische Variablen oder die Negation einer aussagenlogischen Variablen. Ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel in DNF ist

   $$(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2),$$

   wobei der Übersichtlichkeit halber unnötige Klammern weggelassen wurden.

   Geben Sie für die aussagenlogische Formel F jeweils eine äquivalente Formel in DNF an.

   (a) $F = ((A_1 \vee A_2) \Rightarrow (A_2 \vee (\neg A_1)))$

   (b) $F = (A_1 \Leftrightarrow (A_2 \wedge (\neg A_3)))$

   (c) $F = (((A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee (\neg A_1))) \wedge (A_4 \vee (\neg A_2)))$

4. Es sei F eine aussagenlogische Formel mit $|Var(F)| = 5$. Angenommen $\mathcal{L} = (G_1, G_2, \ldots, G_k)$ ist eine Liste aussagenlogischer Formeln, über die wir folgendes wissen:

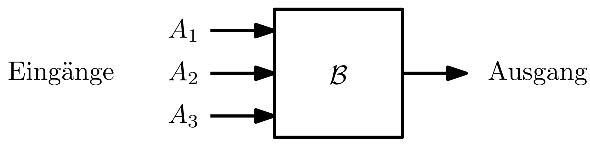
   (i) Für jede Formel G_i, $1 \leq i \leq k$, ist $|Var(G_i)| = 5$.

   (ii) Keine der Formeln in $\mathcal{L}$ ist äquivalent zu F.

   (iii) G_i ist nicht äquivalent zu G_j für alle $1 \leq i < j \leq k$.

   Können wir dann etwas darüber aussagen, wie viele Einträge die Liste $\mathcal{L}$ hat?

5. Eine aussagenlogische Formel F mit $|Var(F)| = 3$ kann man auch als ein logisches Bauelement $\mathcal{B}$ auffassen, welches 3 Eingänge und einen Ausgang hat.



Die Wahrheitswerttabelle für F beschreibt dann, welche Ausgabe $\mathcal{B}$ jeweils für eine Belegung seiner Eingänge hat.

Angenommen Sie haben ein logisches Bauelement $\mathcal{B}$ mit drei Eingängen, dessen Ein-Ausgabeverhalten durch die aussagenlogische Formel

$$F = ((A_1 \wedge A_2) \Rightarrow A_3)$$

beschrieben ist. Kann man nur unter Verwendung von logischen Bauelementen vom Typ wie $\mathcal{B}$ eine Schaltung mit 4 Eingängen aufbauen, deren Ein-Ausgabeverhalten folgender Tabelle entspricht?

Ein1	Ein2	Ein3	Ein4	Aus
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Der Einfachheit halber erlauben wir höchstens eine binäre Verzweigung der Leitungen in der Schaltung.