10. Aufgabenblatt Diskrete Mathematik
SS 2019

1. Für die lineare Funktion

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

soll unter allen Punkten $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, die die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0, \\
&2x_1 + x_3 \leq 4, \\
&2 - x_2 \leq 4x_3, \\
&5 \leq x_1 + 8x_2 - 3x_3, \\
&x_2 \leq 7 \text{ und} \\
&x_2 - 2x_3 \geq 6
\end{aligned}$$

erfüllen, ein Punkt gefunden werden, an dem g maximal wird.

Stellen Sie das zugehörige lineare Programm in Matrix-Vektor-Darstellung auf.

2. Gegeben ist das folgende Max-LP:

$$\begin{aligned}
&(7, 2, -1, 3) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \to \max \\
&\text{mit} \\
&\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq (0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Geben Sie das zu diesem Max-LP duale Min-LP an.

3. Gegeben ist das folgende Min-LP:

$$\begin{aligned}
&(4, 3) \cdot (y_1, y_2)^\top \to \min \\
&\text{mit} \\
&\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 15 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \\
&(y_1, y_2) \geq (0, 0)
\end{aligned}$$

   (a) Stellen Sie den zulässigen Bereich dieses Min-LP graphisch dar und lesen Sie aus der graphischen Darstellung die optimale Lösung ab.

   (b) Stellen Sie für das zu dem gegebenen Min-LP duale Max-LP das Starttableau für das Simplexverfahren auf.

(c) Führen Sie zwei Schritte des Simplexverfahrens durch. Welche untere Schranke für die optimale Lösung des Min-LP ergibt sich aus dem nach diesen beiden Schritten erreichten Punkt des zulässigen Bereichs des Max-LP?

4. Berechnen Sie für das folgende Max-LP eine optimale Lösung mit dem Simplexverfahren.

$$
\begin{aligned}
&(3,4,5)\cdot(x_1,x_2,x_3)^\top \to \max\\
&\text{mit}\\
&\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}4\\5\\7\\15\end{pmatrix}\\
&(x_1,x_2,x_3)\geq(0,0,0)
\end{aligned}
$$

5. In einem Unternehmen stehen 7 Personen

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \text{ und } P_7$$

zur Verfügung, die jeweils Tätigkeiten

$$T_1, T_2, T_3, T_4 \text{ und } T_5$$

übernehmen können. $W_{i,j}$ sei die Wertschöpfung durch Person P_i, wenn sie einen ganzen Arbeitstag lang die Tätigkeit T_j ausführt. Ziel ist es, optimale Anteile $x_{i,j}$ eines Arbeitstags zu bestimmen, während der Person P_i die Tätigkeit T_j ausführt, sodass die Gesamtwertschöpfung der 7 Personen so groß wie möglich wird. Die Art der Tätigkeiten ist dabei so, dass nie zwei Personen gleichzeitig dieselbe Tätigkeit ausführen können.

Stellen Sie ein LP auf, mit dem optimale Anteile $x_{i,j}$ bestimmt werden können.