1. Einführung in die mathematische Logik

1.1. Aussagenlogische Formeln

Eine aussagenlogische Variable A ist eine Variable, die die Werte wahr $(w, 1)$ und falsch $(f, 0)$ annehmen kann.

Die Rechenregeln für Wahrheitswerte sind in Wahrheitswerttabellen festgelegt (siehe Mathematik I).

Bsp: • $\neg w = f$

• $w \wedge f = f$

Aussagenlogische Formeln sind induktiv definiert wie folgt:

(a) Jede aussagenlogische Variable A ist eine aussagenlogische Formel.

(b) Sind P und Q aussagenlogische Formeln, dann sind auch

• $(P \wedge Q)$ ... "P und Q"

• $(P \vee Q)$ ... "P oder Q"

• $(P \Rightarrow Q)$ ... "wenn P dann Q"

• $(P \Leftrightarrow Q)$ ... "P genau dann wenn Q"

• $(\neg P)$ ... "nicht P"

aussagenlogische Formeln.

Bsp: Für die aussagenlogischen Variablen A_1, A_2 und A_3 ist $((A_1 \vee A_2) \Rightarrow A_3)$ eine aussagenlogische Formel.

Mit $Var(F)$ bezeichnen wir die Menge der Variablen, die in einer aussagenlogischen Formel F vorkommen.

Bsp: $Var(((A_1 \Rightarrow A_2) \vee (A_1 \Rightarrow A_3))) = \{A_1, A_2, A_3\}$

Eine Belegung der Variablen in einer aussagenlogischen Formel F ist eine Abbildung $\beta : Var(F) \to \{w, f\}$.

Der Wahrheitswert $I_\beta(F)$ einer aussagenlogischen Formel F unter der Belegung β ist induktiv definiert als:

(a) Wenn $F = A$ für eine Variable A ist, so ist $I_\beta(F) = \beta(A)$.

(b) Wenn es aussagenlogische Formeln P und Q gibt mit

- $F = (P \wedge Q)$, dann ist $I_\beta(F) = I_\beta(P) \wedge I_\beta(Q)$.
- $F = (P \vee Q)$, dann ist $I_\beta(F) = I_\beta(P) \vee I_\beta(Q)$.
- $F = (P \Rightarrow Q)$, dann ist $I_\beta(F) = (\neg I_\beta(P)) \vee I_\beta(Q))$.
- $F = (\neg P)$, dann ist $I_\beta(F) = \neg I_\beta(P)$.

Bsp: $F = ((A_1 \wedge A_2) \vee A_3)$

$\beta : \{A_1, A_2, A_3\} \to \{w, f\}$ mit $\beta(A_1) = w$, $\beta(A_2) = w$, $\beta(A_3) = f$

$$I_\beta(F) = I_\beta((A_1 \wedge A_2)) \vee I_\beta(A_3)$$
$$= (I_\beta(A_1) \wedge I_\beta(A_2)) \vee I_\beta(A_3)$$
$$= (\beta(A_1) \wedge \beta(A_2)) \vee \beta(A_3)$$
$$= (w \wedge w) \vee f = w$$

1.2. Erfüllbarkeit und Äquivalenz aussagenlogischer Formeln

Eine aussagenlogische Formel F heißt *erfüllbar*, wenn es eine Belegung β gibt mit $I_\beta(F) = w$. Andernfalls heißt F *unerfüllbar*.

Eine aussagenlogische Formel F heißt *gültig*, wenn $I_\beta(F) = w$ für jede Belegung β gilt.

Bsp: Für eine Variable A ist

- $(A \vee (\neg A))$ eine gültige Formel.
- $(A \wedge (\neg A))$ eine unerfüllbare Formel.

Lemma: Eine aussagenlogische Formel F ist gültig genau dann, wenn $(\neg F)$ unerfüllbar ist.

Beweis: (Hinrichtung) Sei F gültig. Dann gilt $I_\beta(F) = w$ für alle Belegungen β. Somit gilt $I_\beta((\neg F)) = \neg I_\beta(F) = f$ für alle Belegungen β. Also ist $(\neg F)$ unerfüllbar.

(Rückrichtung) Sei $(\neg F)$ unerfüllbar. Dann gilt $I_\beta((\neg F)) = f$ für alle Belegungen β. Somit gilt $I_\beta(F) = \neg(\neg I_\beta(F))$ $= \neg(I_\beta((\neg F))) = \neg f = w$ für alle Belegungen β.
Also ist F gültig. $\blacksquare$

Bem: Die Frage, ob es einen effizienten Algorithmus gibt, der zu einer gegebenen aussagenlogischen Formel feststellt, ob diese erfüllbar ist oder nicht, hängt eng mit dem berühmten ungelösten P-NP-Problem der theoretischen Informatik zusammen.

Zwei aussagenlogische Formeln P und Q heißen äquivalent, wenn $I_\beta(P) = I_\beta(Q)$ für alle Belegungen $\beta : (Var(P) \cup Var(Q)) \to \{w, f\}$ gilt. Wir schreiben dann $P \boxminus Q$.

Bsp: $(A_1 \vee (A_2 \wedge A_3)) \boxminus ((A_1 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_3))$

Äquivalente Formeln führen zu Rechenregeln für aussagenlogische Formeln. Damit lassen sich Formeln schrittweise umformen und ggf. vereinfachen. (s. Folien)

Bsp: $(\neg(A \wedge B) \vee A) \models\!\!\!\!\!\!\!= (((\neg A) \vee (\neg B)) \vee A)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \models\!\!\!\!\!\!\!= ((\neg A) \vee ((\neg B) \vee A))$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \models\!\!\!\!\!\!\!= ((\neg A) \vee (A \vee (\neg B)))$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \models\!\!\!\!\!\!\!= (((\neg A) \vee A) \vee (\neg B))$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \models\!\!\!\!\!\!\!= ((\neg A) \vee A)$

1.3. Prädikatenlogische Formeln

Für eine Menge M ist ein n-stelliges Prädikat P eine Aussageform mit n Variablen für Elemente aus M.

Bsp: •) M... Menge der Geraden in der Ebene

$P(g,h)$... "die Geraden g und h sind parallel" ist ein 2-stelliges Prädikat

•) $M = \mathbb{N}$ (natürliche Zahlen)

$P(n)$... "n ist eine Primzahl" ist ein 1-stelliges Prädikat

Prädikate lassen sich mit Hilfe der logischen Operationen zu komplexeren Aussageformen kombinieren.

Bsp: $M = \mathbb{N}$

$P(n)$... "n ist eine Primzahl"

$U(n)$... "n ist eine ungerade Zahl"

$P(n) \wedge U(n)$... "n ist eine Primzahl und n ist ungerade"

Um von einer Aussageform zu einer Aussage (bzw. einer prädikatenlogischen Formel) zu gelangen, die dann entweder wahr oder falsch ist, muss man die Variablen in der Aussageform quantifizieren.

Bsp $\forall n\ (P(n))$... "Jede natürliche Zahl ist eine Primzahl" – falsch

1.4. Quantoren

Es gibt den *Allquantor* $\forall$ und den *Existenzquantor* $\exists$.

Bsp: $M = \mathbb{N}$

$P(n)$ ... "n ist eine Primzahl"

$U(n)$ ... "n ist ungerade"

- $\exists n\ (P(n) \wedge U(n))$ ... "Es existiert eine natürliche Zahl, die eine Primzahl und ungerade ist."
  – eine wahre Aussage
- $\forall n\ (P(n) \Rightarrow U(n))$ ... "Für alle natürlichen Zahlen gilt, dass, wenn die Zahl eine Primzahl ist, sie ungerade ist"
  – eine falsche Aussage

Beim Beweisen mathematischer Aussagen ist oft die äquivalente Umformung prädikatenlogischer Formeln erforderlich. Dabei sind die folgenden Regeln zum Umgang mit Quantoren wichtig.

(i) Vertauschbarkeit gleichartiger Quantoren

$$\forall x\ \forall y\ (P(x,y)) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \forall y\ \forall x\ (P(x,y))$$

$$\exists x\ \exists y\ (P(x,y)) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \exists y\ \exists x\ (P(x,y))$$

Bsp: $M = \mathbb{N}$

$S(x,y)$ ... "Die Summe von x und y ist 7."

$$\exists x\ \exists y\ (S(x,y)) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \exists y\ \exists x\ (S(x,y))$$

(ii) Verschieben der Negation

$$\neg \forall x\ (P(x)) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \exists x\ (\neg P(x))$$

$$\neg \exists x\ (P(x)) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \forall x\ (\neg P(x))$$

Bsp: $M = \mathbb{N}$

$G(x)$ ... "x ist eine gerade Zahl"

$$\neg \forall x\, (G(x)) \;\Leftrightarrow\; \exists x\, (\neg G(x))$$

(iii) Konjunktionen und Disjunktionen

$$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \;\Leftrightarrow\; \forall x\, (P(x)) \wedge \forall x\, (Q(x))$$

$$\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) \;\Leftrightarrow\; \exists x\, (P(x)) \vee \exists x\, (Q(x))$$

Bsp: $M = \mathbb{N}$

$G(x)$ ... "x ist eine gerade Zahl"

$S(x)$ ... "x ist eine Quadratzahl"

$$\exists x\, (G(x) \vee S(x)) \;\Leftrightarrow\; \exists x\, (G(x)) \vee \exists x\, (S(x))$$

Achtung: Verschiedenartige Quantoren kann man im Allgemeinen <u>nicht</u> vertauschen.

Bsp: M ... Menge der Geraden in der Ebene

$S(g,h)$ ... "g schneidet h"

$$\forall g\, \exists h\, (S(g,h)) \;\not\Leftrightarrow\; \exists h\, \forall g\, (S(g,h))$$