8. Lineare Optimierung

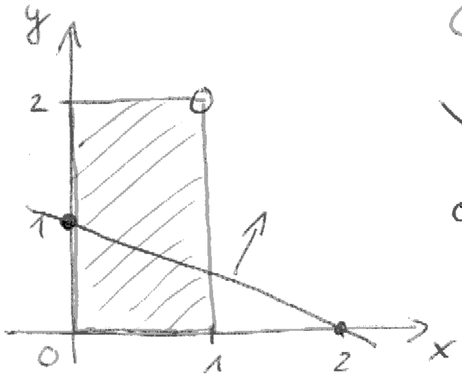
8.1. Ein einleitendes Beispiel

Es soll derjenige Punkt aus der Menge $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 2\}$

bestimmt werden, für den die Funktion

$$g(x,y) = x + 2y$$

den größten Wert annimmt.



╲ Niveaulinie von $g(x,y)$ zum Niveau 2

o gesuchter Punkt aus G

8.2. Allgemeine Aufgabenstellung

Die lineare Funktion

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_m) = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + \ldots + b_m \cdot y_m$$

soll über alle $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ minimiert werden, die die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1} \cdot y_1 + a_{1,2} \cdot y_2 + \ldots + a_{1,m} \cdot y_m \ge c_1 \\ \vdots \\ a_{n,1} \cdot y_1 + a_{n,2} \cdot y_2 + \ldots + a_{n,m} \cdot y_m \ge c_n \end{array}\right\} n \text{ Ungleichungen}$$

Man nennt dies ein lineares Programm (LP).

Üblicherweise fasst man die gegebenen Größen in Vektoren und Matrizen zusammen:

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Kompakte Beschreibung des LP:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & b \circ y^T \to \min \\ \text{mit} & A \circ y^T \geq c^T \\ & y \geq \Theta \end{array}}$$

8.3. Zueinander duale LP

Min-LP

$$\boxed{\begin{array}{ll} & b \circ y^T \to \min \\ \text{mit} & A^T \cdot y^T \geq c^T \\ & y \geq \Theta \end{array}}$$

dualisieren

Max-LP

$$\boxed{\begin{array}{ll} & c \circ x^T \to \max \\ \text{mit} & A \cdot x^T \leq b^T \\ & x \geq \Theta \end{array}}$$

Bsp: **Min-LP**

$$(3,2) \cdot (y_1, y_2)^T \to \min$$

$$\text{mit} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$(y_1, y_2) \geq (0,0)$$

Max-LP

$$(20, 10, 30) \circ (x_1, x_2, x_3)^T \to \max$$

$$\text{mit} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq (0,0,0)$$

Zulässige Bereiche:

$$ZB(\text{Min-LP}) = \{ y \in \mathbb{R}^m ; A^T \cdot y^T \geq c^T \wedge y \geq \Theta \}$$

$$ZB(\text{Max-LP}) = \{ x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x^T \leq b^T \wedge x \geq \Theta \}$$

Für Paare dualer LP gilt:

(i) $\forall x \in ZB(\text{Max-LP}) \; \forall y \in ZB(\text{Min-LP}) \; (c \cdot x^T \leq b \cdot y^T)$

(ii) Max-LP hat eine optimale Lösung x_{opt} genau dann, wenn Min-LP eine optimale Lösung y_{opt} hat. Es gilt dann: $c \cdot x_{opt}^T = b \cdot y_{opt}^T$.

8.4. Das Simplexverfahren

Grundidee: systematisch die Ecken des ZB nach einer optimalen Lösung absuchen

Eingabe:

$\boxed{\text{Max-LP}}$

$$c \cdot x^T \to \max$$
$$\text{mit } A \cdot x^T \leq b^T$$
$$x \geq \Theta$$

Voraussetzungen:

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$b \geq \Theta$

Übertragung in eine Tabellenstruktur (Tableau):

		1	2	$\cdots$	$(m+n)$
s_1	z_1	$e_{1,1}$	$e_{1,2}$	$\cdots$	$e_{1,m+n}$
s_2	z_2	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$				
s_m	z_m	$e_{m,1}$	$e_{m,2}$	$\cdots$	$e_{m,m+n}$
	W	f_1	f_2	$\cdots$	f_{m+n}

- $s_1, s_2, \ldots, s_m$ paarweise verschiedene Spaltennummern aus $\{1, 2, \ldots, m+n\}$
- $z_i \in \mathbb{R}$, $e_{i,j} \in \mathbb{R}$
- $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = c_{n+m} = 0$
- $f_j = (e_{1,j} \cdot c_{s_1} + e_{2,j} \cdot c_{s_2} + \ldots + e_{m,j} \cdot c_{s_m}) - c_j$
- $W = z_1 \cdot c_{s_1} + z_2 \cdot c_{s_2} + \ldots + z_m \cdot c_{s_m}$

Bsp: Das LP $\quad (1,1) \cdot (x_1, x_2)^T \to \max$

$\boxed{\begin{matrix} n = 2 \\ m = 3 \end{matrix}}$

mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(x_1, x_2) \geq (0,0)$

liefert folgendes Starttableau:

		b^T	1	2	3	4	5
$n+1$ …	3	4	1	2	1	0	0
	4	3	2	−1	0	1	0
$n+m$ …	5	1	0	1	0	0	1
		0	−1	−1	0	0	0

A (Spalten 1–2), I_m (Spalten 3–5); $\underbrace{-1 \;\; -1}_{-c}\;\;\underbrace{0 \;\; 0 \;\; 0}_{0}$

<u>Fallunterscheidung</u> in einem Schritt des Simplexverfahrens:

<u>1. Fall:</u> $f_1 \geq 0,\ f_2 \geq 0, \dots, f_{n+m} \geq 0$

Dann ist $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ mit $x_k = \begin{cases} z_i, & \text{falls } s_i = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

eine optimale Lösung.

<u>2. Fall:</u> Es gibt ein j mit $f_j < 0$ und $e_{i,j} \leq 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Dann hat das LP keine optimale Lösung.

<u>3. Fall:</u> Für alle j mit $f_j < 0$ gibt es ein $e_{i,j} > 0$.

Dann wählen wir ein l mit $f_l < 0$ und bestimmen dazu ein k mit $e_{k,l} > 0$ und $\frac{z_k}{e_{k,l}}$ minimal.

Damit aktualisieren wir die Einträge im Tableau wie folgt:

$$s_i = \begin{cases} s_i, & \text{für } i \neq k \\ l, & \text{für } i = k \end{cases}$$

$$z_i' = \begin{cases} \dfrac{z_i}{e_{k,l}}, & \text{für } i = k \\[2mm] z_i - \dfrac{e_{i,l}}{e_{k,l}} \cdot z_k, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$e_{i,j}' = \begin{cases} \dfrac{e_{i,j}}{e_{k,l}}, & \text{für } i = k \\[2mm] e_{i,j} - \dfrac{e_{i,l}}{e_{k,l}} \cdot e_{k,j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

~~[illegible]~~

__Bsp:__ (von oben)

3. Fall, $l = 1$, $k = 2$:

		1	2	3	4	5
3	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
1	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
5	1	0	1	0	0	1
	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

3. Fall, $l = 2$, $k = 3$:

		1	2	3	4	5
3	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$
1	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	1	0	1	0	0	1
	3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

1. Fall:

$x^* = (2,1)$ ist eine optimale Lösung des LP.